

∞ Baccalauréat C Bordeaux septembre 1979 ∞

EXERCICE 1

5 POINTS

Étant donné un entier relatif n on considère les entiers relatifs :

$$A = 3n + 4 \quad \text{et} \quad B = 9n - 5.$$

1. Déterminer, suivant les valeurs de n , le plus grand commun diviseur de A et B .
2. Déterminer les valeurs de n pour que le plus grand commun diviseur de A et B soit égal à 17 et le plus petit commun multiple de A et B soit égal à 884.

EXERCICE 2

3 POINTS

On considère un plan affine E rapporté à un repère affine (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soient A le point de coordonnées $(1; 2)$ et A' le point de coordonnées $(3; 4)$.

On désigne par f l'application affine de E dans E qui transforme A en A' et dont l'endomorphisme associé φ vérifie les deux propriétés :

- a. φ est involutif
 - b. $\varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j}$.
1. f est-elle bijective ?
 2. Déterminer $\varphi(\vec{j})$.
 3. Trouver les coordonnées $(x_1; y_1)$ du point M_1 transformé d'un point M de coordonnées $(x; y)$ par l'application f .
 4. f est-elle involutive ? f possède-t-elle des points invariants ?

PROBLÈME

12 POINTS

On désigne par \mathcal{F} l'ensemble des fonctions numériques, définies sur \mathbb{R} , de la variable réelle x . On rappelle que cet ensemble, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

On notera par θ l'élément neutre pour l'addition (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta(x) = 0$).

On désigne par \mathcal{J} l'ensemble des éléments de \mathcal{F} qui sont intégrables sur tout intervalle fermé borné $[-a; a]$ ($a > 0$).

On rappelle que, pour tout $f \in \mathcal{J}$, $a > 0$, il existe $M_{a,f} \geq 0$ tel que, pour tout $x \in [-a; a]$, $|f(x)| \leq M_{a,f}$.

Partie A

1. Dire pourquoi les fonctions suivantes sont éléments de l'ensemble \mathcal{J}

$$f_1 : x \mapsto E(x)$$

où $E(x)$ est l'unique élément de \mathbb{Z} tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$

$$f_2 : x \mapsto \sin x$$

$$f_3 : x \mapsto \cos x$$

$$f_4 : x \mapsto \sqrt{|x|}$$

2. Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{F}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$\begin{cases} F(x) &= \int_{-x}^x f(t) dt \text{ et} \\ F(0) &= 0 \end{cases}$$

détermine un élément F de \mathcal{F} et une application linéaire Φ de \mathcal{F} dans \mathcal{F} : $f \mapsto \Phi(f) = F$. Déterminer l'image par Φ de :

- a. la fonction nulle θ
 - b. la fonction constante $k : x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)
 - c. la fonction $\text{id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$
 - d. la fonction f_2
 - e. la fonction f_3
3. a. Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\int_{-x}^x x f_1(t) dt = 0$$

(On pourra utiliser des considérations graphiques en faisant intervenir le point ω de \mathbb{R}^2 de coordonnées $(1/2 ; 0)$.)

- b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^{x+1} f_1(t) dt = x$$

- c. Déterminer l'image par Φ de la fonction f_1 .

Partie B

1. Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{F}$, la fonction $F = \Phi(f)$ est une fonction continue, impaire.
Prouver que l'application Φ applique \mathcal{F} dans \mathcal{F} .
2. Montrer que si $f \in \mathcal{F}$ est impaire alors $\Phi(f) = \theta$. (On pourra utiliser des considérations graphiques). En déduire quelle est l'application $\Phi \circ \phi$ de \mathcal{F} dans \mathcal{F} .
3. On suppose que $f \in \mathcal{F}$ est continue sur \mathbb{R} . Montrer que, dans ces conditions, $\Phi(f) = F$ est une fonction dérivable. Exprimer $F'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.
4. Déterminer l'ensemble des fonctions de \mathcal{F} qui sont continues et élément du noyau de cf .

Partie C

On considère l'élément g de \mathcal{F} défini par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Log } 2} & \text{si } |x| \leq 2 \\ \frac{1}{\text{Log } x} & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

1. Construire la courbe représentative γ de la fonction g dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Montrer que $g \in \mathcal{F}$.
2. Soit $G = \Phi(g)$. On ne cherchera pas à calculer $G(x)$.
Démontrer que, pour tout $t > 2$, $\frac{1}{\text{Log } t} > \frac{1}{t}$.
En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$.

3. Soit $h(x) = \int_2^x \frac{1}{\text{Log } t} dt$ pour $x \geq 2$

Soient A, N, M les points de γ d'abscisses respectives 2, \sqrt{x} et x ; A', N', M' leurs projections orthogonales sur l'axe $x'Ox$ pour $x \geq 4$.

En majorant $h(x)$ par la somme des aires de deux trapèzes montrer que

$$h(x) \leq \frac{\sqrt{x}-2}{2} \left[\frac{1}{\text{Log } 2} + \frac{1}{\text{Log } \sqrt{x}} \right] + \frac{x-\sqrt{x}}{2} \left[\frac{1}{\text{Log } x} + \frac{1}{\text{Log } \sqrt{x}} \right]$$

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = 0$.

4. Construire la courbe représentative de la fonction G dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.