Baccalauréat C Caen[1] septembre 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\text{(E)} \qquad z^6 - 2(1-5\text{i})z^3 + 11 + 2\text{i} = 0.$$

1. Résoudre l'équation obtenue en substituant t à z^3 dans (E).
2. Calculer $(2-\text{i})^3$.
3. Résoudre l'équation (E).

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f(x) = x\text{Log}\, x + \frac{1}{x}.$$

   Démontrer que f possède des primitives sur $\mathbb{R}_+^\star$, et déterminer celle qui s'annule pour $x = 1$.
2. Étudier (sans tracer la courbe correspondante) la variation de $xf(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et en déduire le signe de $f(x)$.
3. Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\left(\text{Log}\, x - \frac{1}{2}\right) + \text{Log}\, x + \frac{1}{4}$$

   et en tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.

PROBLÈME **13 POINTS**

On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que : $\mathscr{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les lois usuelles et que :T est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}$, dont une base est $(P_0,\ P_1,\ P_2)$ avec

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

Soit Φ l'application de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$ telle que $\Phi(F) = f$ où f est définie par

$$f(x) = F(x+1) - F(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

Partie A

1. **a.** Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{F}$.
   b. Quelle est l'image par Φ d'un polynôme de degré n ? En déduire que $\Phi(\mathscr{P}) \subset \mathscr{P}$.
2. Soit φ la restriction de Φ à $\mathscr{P}$.
   a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{P}$ et déterminer $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ en fonction de P_0, P_1, P_2.
   En déduire le noyau et l'image de φ.

1. Nantes–Poitiers–Rennes

b. Existe-t-il des droites $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ telles que $\varphi(\mathscr{D}) = (\mathscr{D})$?

3. Soit F_0 l'élément de $\mathscr{F}$ défini par $F_0(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Déterminer $f_0 = \Phi(F_0)$. En déduire que la droite vectorielle engendrée par F_0 est globalement invariante par Φ.
Quelle est la restriction de Φ à cette droite ?

Partie B

Dans cette partie, on se propose, pour tout nombre réel λ, de déterminer l'ensemble S_λ :

$$S_\lambda = \{F \in \mathscr{F}, \quad \Phi(F) = \lambda F\}$$

1. **a.** Trouver un nombre réel λ_0 tel que le noyau de Φ soit égal à S_{λ_0}.

b. Vérifier que

$$(F \in S_\lambda) \iff [\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x+1) = (\lambda+1)F(x).]$$

Quel est l'ensemble S_{-1} ?

c. Soit J la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = \mathrm{e}^x \sin \pi x.$$

Démontrer qu'il existe une valeur λ, unique telle que J appartienne à S_λ.

2. Pour λ différent de -1, on notera u_λ, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u_\lambda(x) = |1+\lambda|x$.
Démontrer que si $F \in \mathscr{F}$, la fonction $G = \dfrac{F}{u_\lambda}$ appartient à $\mathscr{F}$.

3. On suppose $\lambda > -1$.
Démontrer que F appartient à S_λ si et seulement si G appartient au noyau de Φ. En déduire qu'il existe un réel a, indépendant de λ, tel que

$$S_\lambda = \{u_\lambda \times H, \quad H \in S_a\}$$

4. On suppose maintenant $\lambda < -1$.
Démontrer qu'il existe un réel b, indépendant de λ, tel que

$$S_\lambda = \{u_\lambda \times H, \quad H \in S_b\}$$