Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

À tout réel m, élément de $]0\,;\,1[$ on associe, dans un plan affine euclidien, rapporté à un sepère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ la conique (E_m) d'équation

$$y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}.$$

1. Construite la courbe $\left(E_{\frac{3}{4}}\right)$.
2. Quelle est la nature de (E_m) ? Déterminer par leurs coordonnées dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ le centre et les sommets de (E_m). Déterminer et tracer la courbe (S) constituant l'ensemble des sommets du grand axe de (E_m) quand m varie dans l'intervalle indiqué.
3. Déterminer par leurs coordonnées dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ les foyers de (E_m). Déterminer et tracer la courbe (C) constituant l'ensemble de ces foyers quand m varie dans l'intervalle indiqué.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Deux urnes A et B contiennent des boules numérotées. Dans l'urne A, il y a deux boules : une porte le numéro a, l'autre porte le numéro 1. Dans l'urne B, il y a trois boules : une porte le numéro b, les deux autres le numéro -1. a et b sont deux entiers relatifs.
On tire au hasard (*) une boule de l'urne A et une boule de l'urne B et on calcule la somme des numéros portés par chacune des deux boules tirées. On définit ainsi une variable aléatoire réelle X.

1. Calculer, en fonction de a et b, l'espérance mathématique de X.
2. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers relatifs tels que l'espérance mathématique de X soit nulle.
3. Déterminer l'ensemble des couples $(a,~b)$ d'entiers relatifs tels que les deux conditions suivantes soient simultanément remplies :
   - l'espérance mathématique de X est nulle ;
   - l'écart-type de X est inférieur ou égal à 2.

(*) cela signifie que les couples de numéros possibles sont d'égale probabilité.

PROBLÈME **12 POINTS**

N. B. – Les parties A, B et C sont indépendantes

Soit $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère cartésien du plan affine (P). On désigne par f une application affine de (P) dans (P) telle que $f(0) = 0$ et dont l'endomorphisme φ associéé a pour matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan vectoriel $\left(\vec{\text{P}}\right)$ associé à (P).

Partie A

Dans cette partie, on suppose que

$$\varphi\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right) = (a + b)\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right) \text{ et que } b \neq 0.$$

1. Calculer c et d en fonction de a et b.

2. Trouver une équation de l'ensemble des points M de (P) tels que M, $f(M)$ et le point A défini par $\overrightarrow{\text{OA}} = \overrightarrow{\imath}$ soient alignés. Discuter la nature de cet ensemble suivant les valeurs de a et b en supposant le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé.

3. Soit $\overrightarrow{E_k} = \left\{\overrightarrow{u} \in \left(\overrightarrow{\text{P}}\right) / \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = k\overrightarrow{u},\ k \in \mathbb{R}\right\}$.

   Calculer k pour que $\overrightarrow{E_k}$ soit différent de $\{\overrightarrow{0}\}$. Déterminer $\overrightarrow{E_k}$ pour ces valeurs de k.

4. On pose $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$.

   Quelle est la matrice de φ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$?

   On pose $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et, plus généralement $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$ pour tout n de $\mathbb{N}^\star - \{1\}$. Donner, en fonction de $\alpha = a + b$ et $\beta = a - b$ la matrice de φ^n dans la base (1, J) puis dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

   En déduire les coordonnées de f^n(A) dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ en fonction de a, b et n.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $f \circ f = f_0$ et que $f \neq f_0$; f_0 étant l'application affine qui à tout point de (P) fait correspondre le point O.

1. Lorsque $b = 1$, calculer c et d en fonction de a et démontrer que l'image de (P) par f est une droite (Δ) passant par O telle que sa droite vectorielle associée soit le noyau de φ noté Ker φ ?

2. Dans le cas général, démontrer que $\varphi\left(\overrightarrow{\text{P}}\right)$, image de $\overrightarrow{\text{P}}$, est incluse dans Ker φ.

   En déduire que Ker φ puis $\varphi\left(\overrightarrow{\text{P}}\right)$ sont de dimension 1. Retrouver ainsi le résultat du 1.

3. Soit M_0 un point de (P) et (D) la droite de (P), parallèle à (Δ) passant par M_0. Montrer que, quel que soit le point M de (D) , $\varphi\left(\overrightarrow{M_0M}\right) = \overrightarrow{0}$.

   En déduire l'image de (D) par f.

Partie C

On suppose, dans cette partie que

$$f \circ f \circ f = f^3 = f_0 \quad \text{et} \quad f \circ f = f^2 \neq f_0$$

1. $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur de $\overrightarrow{\text{P}}$ tel que $\varphi^2\left(\overrightarrow{u}\right) \neq \overrightarrow{0}$, prouver qu'il n'existe pas de réel k tel que $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = k\overrightarrow{u}$.

   En déduire qu'il existe deux réels λ et λ' tels que

$$\varphi^2\left(\overrightarrow{u}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) + \lambda'\overrightarrow{u}.$$

2. Calculer $\varphi^3\left(\overrightarrow{u}\right)$ en fonction de λ, λ', $\overrightarrow{u}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$.

   Que peut-on en déduire pour λ et λ' puis pour $\varphi^2\left(\overrightarrow{u}\right)$?

   Existe-t-il une application f telle que l'on ait à la fois $f^3 = f_0$ et $f^2 \neq f_0$?