

∞ Baccalauréat C Clermont-Ferrand¹ ∞
septembre 1979

Matériel autorisé :

- Toutes tables numériques et en particulier les tables de logarithmes (sans formu-
laire)
- Règles et cercles à calculs
- Feuille(s) de papier millimétré à distribuer aux candidats.

Matériel interdit :

- Calculateurs électroniques de poche

EXERCICE 1

5 POINTS

On considère l'équation

$$z^3 + (i - 2)z^2 + 3(1 - i)z + 2i - 2 = 0$$

où l'inconnue z est un nombre complexe.

1. Démontrer que cette équation admet une solution réelle z_1 que l'on calculera.
2. Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de cette équation.
3. Déterminer un nombre complexe a tel que les trois nombres $z_1 - a$, $z_2 - a$ et $z_3 - a$ aient même module.

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[-2 ; 0]$ par

$$f(x) = xe^{-2x}.$$

1. On désigne par F la primitive de f sur $[-2 ; 0]$ qui s'annule en 0. Justifier l'exis-
tence de F et déterminer F . (On pourra se servir de la formule d'intégration
par parties.)
2. Démontrer que F est une bijection de $[-2 ; 0]$ sur un intervalle I de \mathbb{R} que l'on
déterminera.
3. On désigne par G l'application réciproque de F . Montrer que G est définie sur
 I et admet une dérivée G' sur $I - \{0\}$.

PROBLÈME

11 POINTS

On désignera par E l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des couples de nombres réels et par F l'en-
semble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ des couples d'entiers relatifs.

On considère l'application f de E dans E qui au couple $(x ; y)$ fait correspondre le
couple $(X ; Y)$ défini par

$$\begin{cases} X &= 3x + 4y \\ Y &= 2x + 3y \end{cases}$$

Partie A

1. Montrer que l'application f est bijective et déterminer son application réci-
proque.

1. Grenoble

2. Montrer que l'image de F par f est égale à F .
3. Soit H l'ensemble des couples $(x; y)$ de E pour lesquels $x^2 - 2y^2 = -1$. Montrer que l'image de H par f est égale à H .
4. Soit S l'ensemble des couples $(x; y)$ de F pour lesquels $x^2 - 2y^2 = -1$. Montrer que l'image de S par f est égale à S .
5. On pose $s_0 = (1; 1)$ et, par récurrence, $s_{n+1} = f(s_n)$, pour tout entier naturel n . Montrer que s_n appartient à S , pour tout entier naturel n .
6. On désigne par x_n et y_n les entiers définis par $s_n = (x_n; y_n)$. Calculer x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 .
7. Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

Partie B

On considère la fonction numérique, h définie pour tout nombre réel t , par

$$h(t) = 3t + 4\sqrt{\frac{t^2 + 1}{2}}.$$

1. Montrer que la fonction h est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $h(-1) = x_0$ et $h(x_n) = x_{n+1}$ pour tout entier naturel n ; [les x_n ont été définis au A 6.].
3. Montrer qu'il n'y a aucun couple $(x; y)$ de S pour lequel $-1 < x < 1$.
4. En déduire qu'il n'y a aucun couple $(x; y)$ de S pour lequel $x_0 < x < x_1$.
Plus généralement, montrer qu'il n'y a aucun couple $(x; y)$ de S pour lequel $x_n < x < x_{n+1}$.
5. Déduire des questions A 7. et B 4. que S est l'ensemble de tous les couples

$$(x_n; y_n), (x_n; -y_n), (-x_n; y_n), (-x_n; -y_n)$$

pour n entier naturel.