

∞ Baccalauréat C Clermont-Ferrand<sup>1</sup> ∞  
septembre 1979

Matériel autorisé :

- Toutes tables numériques et en particulier les tables de logarithmes (sans formu-  
laire)
- Règles et cercles à calculs
- Feuille(s) de papier millimétré à distribuer aux candidats.

Matériel interdit :

- Calculateurs électroniques de poche

**EXERCICE 1**

**5 POINTS**

On considère l'équation

$$z^3 + (i-2)z^2 + 3(1-i)z + 2i - 2 = 0$$

où l'inconnue  $z$  est un nombre complexe.

1. Démontrer que cette équation admet une solution réelle  $z_1$  que l'on calculera.
2. Déterminer les deux autres solutions  $z_2$  et  $z_3$  de cette équation.
3. Déterminer un nombre complexe  $a$  tel que les trois nombres  $z_1 - a$ ,  $z_2 - a$  et  $z_3 - a$  aient même module.

**EXERCICE 2**

**4 POINTS**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur l'intervalle  $[-2 ; 0]$  par

$$f(x) = xe^{-2x}.$$

1. On désigne par  $F$  la primitive de  $f$  sur  $[-2 ; 0]$  qui s'annule en 0. Justifier l'exis-  
tence de  $F$  et déterminer  $F$ . (On pourra se servir de la formule d'intégration  
par parties.)
2. Démontrer que  $F$  est une bijection de  $[-2 ; 0]$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  que l'on  
déterminera.
3. On désigne par  $G$  l'application réciproque de  $F$ . Montrer que  $G$  est définie sur  
 $I$  et admet une dérivée  $G'$  sur  $I - \{0\}$ .

**PROBLÈME**

**11 POINTS**

On désignera par  $E$  l'ensemble  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  des couples de nombres réels et par  $F$  l'en-  
semble  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  des couples d'entiers relatifs.

On considère l'application  $f$  de  $E$  dans  $E$  qui au couple  $(x ; y)$  fait correspondre le  
couple  $(X ; Y)$  défini par

$$\begin{cases} X &= 3x + 4y \\ Y &= 2x + 3y \end{cases}$$

**Partie A**

1. Montrer que l'application  $f$  est bijective et déterminer son application réci-  
proque.

---

1. Grenoble

2. Montrer que l'image de  $F$  par  $f$  est égale à  $F$ .
3. Soit  $H$  l'ensemble des couples  $(x; y)$  de  $E$  pour lesquels  $x^2 - 2y^2 = -1$ . Montrer que l'image de  $H$  par  $f$  est égale à  $H$ .
4. Soit  $S$  l'ensemble des couples  $(x; y)$  de  $F$  pour lesquels  $x^2 - 2y^2 = -1$ . Montrer que l'image de  $S$  par  $f$  est égale à  $S$ .
5. On pose  $s_0 = (1; 1)$  et, par récurrence,  $s_{n+1} = f(s_n)$ , pour tout entier naturel  $n$ . Montrer que  $s_n$  appartient à  $S$ , pour tout entier naturel  $n$ .
6. On désigne par  $x_n$  et  $y_n$  les entiers définis par  $s_n = (x_n; y_n)$ . Calculer  $x_1, x_2, x_3$  et  $y_1, y_2, y_3$ .
7. Montrer que la suite  $(x_n)$  est strictement croissante.

### Partie B

On considère la fonction numérique,  $h$  définie pour tout nombre réel  $t$ , par

$$h(t) = 3t + 4\sqrt{\frac{t^2 + 1}{2}}.$$

1. Montrer que la fonction  $h$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $h(-1) = x_0$  et  $h(x_n) = x_{n+1}$  pour tout entier naturel  $n$ ; [les  $x_n$  ont été définis au A 6.].
3. Montrer qu'il n'y a aucun couple  $(x; y)$  de  $S$  pour lequel  $-1 < x < 1$ .
4. En déduire qu'il n'y a aucun couple  $(x; y)$  de  $S$  pour lequel  $x_0 < x < x_1$ .  
Plus généralement, montrer qu'il n'y a aucun couple  $(x; y)$  de  $S$  pour lequel  $x_n < x < x_{n+1}$ .
5. Déduire des questions A 7. et B 4. que  $S$  est l'ensemble de tous les couples

$$(x_n; y_n), (x_n; -y_n), (-x_n; y_n), (-x_n; -y_n)$$

pour  $n$  entier naturel.