Baccalauréat C Côte d'Ivoire juin 1979

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient 2 boules blanches, 4 boules rouges et 2 boules vertes, toutes indiscernables au toucher.
Un joueur tire une boule de l'urne au hasard ;

- Si elle est blanche, il reçoit x francs $\left(x \in \mathbb{N}^{\star}\right)$ et le jeu s'arrête.
- Si elle est rouge, il donne y francs $\left(y \in \mathbb{N}^{\star}\right)$ et le jeu s'arrête.
- Si elle est verte, il tire une autre boule au hasard, sans remettre la première ; si cette dernière boule tirée est blanche, il reçoit x francs et le jeu s'arrête ; si non il donne x francs et le jeu s'arrête.

On désigne par X le gain en francs (positif ou négatif suivant qu'il a reçu ou donné de l'argent).

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ainsi définie ?
2. Calculer l'espérance mathématique E(X) en fonction de x et de y.
3. Pour participer au jeu précédent, le joueur a dû verser 5 francs.
4. Trouver les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels tous deux inférieurs à 100 tels que l'espérance de gain du joueur soit égale à sa mise.

EXERCICE 2 **4 points**

On appelle **Q** l'ensemble des entiers naturels de la forme $q = 2^a.p$ où p désigne un nombre premier arbitraire autre que 2 et a un naturel quelconque.

1. Calculer en fonction de p et de a le nombre n et la somme s des diviseurs d'un nombre q.
2. Montrer que si l'égalité $s = 2q$ est vérifiée, le nombre $2a+1-1$ est premier.
3. Montrer que si a + 1 n'est pas premier, il en est de même pour $2^{a+1}-1$. (On montrera que si b et c sont des entiers strictement supérieurs à 1, alors $2^{bc}-1$ est divisible par 2^b-1).
4. Trouver tous les éléments de **Q** pour lesquels $a < 10$ et $s = 2q$.

PROBLÈME **12 points**

N.B. - La partie C peut être abordée sans que la partie B ait été traitée

Dans tout le problème, P désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A

Pour tout réel k strictement positif, on considère l'application T_k de P dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & kx \\ y' & = & y + \text{Log}\,k \end{array}\right. \quad \text{où Log désigne le logarithme népérien.}$$

1. Montrer que T_k est une application affine bijective.

2. Soit G l'ensemble des applications T_k où k décrit $\mathbb{R}$. La loi de composition des applications étant notée $\circ$, montrer que $(G,\ \circ)$ est isomorphe à $(\mathbb{R},\ \times)$ et que $(G,\ \circ)$ est un groupe.

   Préciser si ce groupe est commutatif ou non, indiquer son élément neutre et le symétrique de l'élément T_k.

Partie B

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction numérique f_k de la variable réelle x telle que, pour tout x réel :

$$f_k(x) = \frac{\text{e}^x - k^2\text{e}^{-x}}{2}$$

où e désigne la base du logarithme népérien.

1. Étudier la variation de f_k.
2. Montrer que f_k admet une application réciproque que l'on notera g_k. Calculer $g_k(x)$ pour tout réel x de l'ensemble de définition de g_k.
3. On appelle $\mathcal{C}_k$ et Γ_k les courbes représentatives de f_k et g_k dans $\mathcal{R}$.
   a. Construire $\mathcal{C}_1$ et Γ_1.
   b. Montrer que le point O est centre de symétrie pour chacune des courbes $\mathcal{C}_1$ et Γ_1.
   c. Calculer, en fonction du réel a positif, l'aire du domaine plan D défini par :

$$M(x\,;\ y) \in D \iff \left\{\begin{array}{ccccc} -a & \leqslant & x & \leqslant & a\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & g_1(x).\end{array}\right.$$

4. Montrer que l'image de Γ_1 par l'application T_k définie au 1. est la courbe Γ_k.
5. En utilisant les résultats 3. b. et 4., montrer que Γ_k admet un centre de symétrie.

   Quel est l'ensemble de ces centres de symétrie quand k décrit $\mathbb{R}$?
6. Montrer que deux courbes quelconques Γ_{k_1} et Γ_{k_2} se déduisent l'une de l'autre par une application de l'ensemble G que l'on précisera.

Partie C

Pour tout réel t élément de $[0\ ;\ 2\pi]$, on considère le point M de P de coordonnées $(x\,;\ y)$ dans $\mathcal{R}$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \cos t\\ y & = & \sin t\end{array}\right.$$

1. Quelle est la nature du mouvement de M quand t varie ?
2. k étant un réel strictement positif arbitrairement choisi, soit m le point de P tel que $m = T_k(M)$.
   a. Donner une équation cartésienne de la trajectoire de m quand t varie.
   Préciser la nature de cette courbe, ses éléments de symétrie et les points remarquables qui s'y trouvent.
   b. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point m à la date t.
   Le mouvement est-il accéléré ou retardé ?
3. On suppose que $k = 2$. Construire, sur un même croquis, les trajectoires de M et m.

   Placer les positions M_0 et m_0 de ces points à la date $t = 0$, ainsi que les représentants, d'origines respectives M_0 et m_0, des vecteurs vitesse et accélération de chacun de ces mobiles à la date $t = 0$.

   On donne Log $2 \approx 0,7$.