

∞ Baccalauréat C Étranger Groupe I bis juin 1979 ∞

EXERCICE 1

4 points

On donne une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2.

On construit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{q_0} \\ u_1 &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} \\ \dots &= \dots \\ u_n &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \dots + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} \end{aligned}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et peut être majorée par une suite convergente (ne dépendant par exemple que de q_0).
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite, qui appartient à l'intervalle $]0; 1[$ de \mathbb{R} .
2. Montrer que si, pour tout entier n supérieur ou égal à l'entier k , $q_n = q_k$ la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un rationnel.

EXERCICE 2

4 points

1. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, tracer la courbe C définie par l'équation :

$$2ay = x^2 \quad a \text{ réel positif donné.}$$

2. Calculer la pente (ou coefficient directeur) de la tangente à la courbe C au point M_1 d'abscisse x_1 . Quelle relation doivent vérifier les abscisses x_1 et x_2 de deux points M_1 et M_2 de C pour que les tangentes à C en ces points soient orthogonales?
3. Démontrer que la droite $M_1 M_2$ déterminée par deux points de C ainsi associés passe par un point fixe qu'on placera sur la figure.
Déterminer l'ensemble décrit par l'intersection des tangentes à C en M_1 et M_2 .

PROBLÈME

12 points

Partie A

\mathbb{C} désignant le corps des nombres complexes, on pose :

$$j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

On vérifiera que $1 + j + j^2 = 0$.

Soit F l'application polynôme de \mathbb{C} dans \mathbb{C} :

$$z \longmapsto F(z) = z(z+1)(z-j^2) + \frac{2}{9}(j-4).$$

1. Déterminer les coefficients complexes a et b de façon que l'application σ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} : $z \mapsto \sigma(z) = az + b$ vérifie les deux conditions :

$$\begin{cases} \sigma(j^2) = 0 \\ \sigma(0) = -1. \end{cases}$$

Comparer alors $\sigma(-1)$ et j^2 .

2. On considère l'application s de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , dépendant du paramètre complexe m :

$$z \mapsto s(z) = mz - 1.$$

Peut-on déterminer m de façon que $\forall z \in \mathbb{C} \quad F[s(z)] = F(z)$?

(On admet que deux applications polynômes sont égales si et seulement si les polynômes ordonnés ont les mêmes coefficients).

Comparer au résultat de 1.

3. Soit r l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} : $z \mapsto r(z) = jz - 1$.

Déterminer l'unique complexe z_0 invariant par r .

$$\text{Vérifier } z_0^2 = -\frac{1}{3}j^2.$$

Calculer $r \circ r \circ r$. Vérifier que, pour tout z , dans \mathbb{C} muni de sa structure d'espace affine réel, z_0 est l'isobarycentre du triplet $(z, r(z), r^2(z))$.

4. Pour λ complexe, développer et ordonner $F(z_0 + \lambda)$.

En déduire que l'équation $F(z) = 0$ admet trois racines complexes, préciser celles-ci et les situer sur une figure du plan complexe.

Partie B

Soit E un plan vectoriel réel (espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R}). Un endomorphisme f de E est dit ternaire si $f \circ f \circ f = \text{Id}_E$, application identique de E .

(Dans la suite on notera $f \circ f \circ f = f^2 \circ f = f^3$, $f^3 \circ f = f^4$, etc.)

1. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme ternaire de E , et \vec{u} un vecteur non nul de E tel que le système $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ soit lié. Montrer que $f(\vec{u}) = \vec{u}$.

En déduire qu'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme $A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & k \end{pmatrix}$, h, k étant deux réels.

Démontrer que f est nécessairement l'application identique. (On calculera A^3).

2. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E , et que, pour tout vecteur \vec{u} non nul de E , le système $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est libre. Soit \vec{u} un vecteur non nul de E , et $\vec{v} = f(\vec{u})$; alors il existe deux réels p, q tels que la matrice de f dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$ soit $B = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}$.

Calculer p et q de façon que f soit ternaire.

p, q ayant les valeurs trouvées, et π désignant un plan affine attaché à E , démontrer, analytiquement ou par tout autre procédé, que toute application affine g de π dans π admettant f comme endomorphisme associé admet un point invariant unique et vérifie $g \circ g \circ g = \text{Id}_\pi$.

3. Plus généralement, soit F l'endomorphisme de E dont la matrice, dans une base $(\vec{u}; \vec{v})$ de E , est : $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ où θ est un réel donné appartenant à l'intervalle $]0; \pi[$.

On définit sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par :

$$\Phi(\vec{u}, \vec{u}) = 1, \quad \Phi(\vec{v}, \vec{v}) = 1, \quad \Phi(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\theta$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur E , et que F est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien (E, Φ) ?

E étant supposé orienté par la base $(\vec{u} ; \vec{v})$, déterminer le vecteur \vec{w} de E de façon que $(\vec{u} ; \vec{w})$ soit une base directe et orthonormée relativement à Φ .

Former la matrice de F dans cette nouvelle base.

Quelle est la nature de F dans (E, Φ) ? À quelle condition, n étant un entier donné supérieur ou égal à 3, a-t-on $F^n = \text{Id}_E$?