Durée : 4 heures

Baccalauréat C Grenoble juin 1979

PREMIER EXERCICE **3,5 points**

Le plan affine euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit a un réel strictement positif, A le point de cordonées $(a~;~0)$ et B le point de cordonées $(a~;~a)$.
On désigne par R la rotation de centre O et d'angle droit direct, par S la symétrie par rapport au point B, et par R$'$ la rotation de centre A et d'angle droit rétrograde. On pose $\text{F} = \text{R}' \circ \text{S} \circ \text{R}$.

1. Quelle est la nature de la transformation F ?

   Préciser ses éléments caractéristiques (on pourra construire l'image par F du point C défini par $\text{C} = \text{R}^{-1}(\text{B})$).
2. Soit D la droite d'équation $x + y = a$ et S_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Déterminer la transformation composée $\text{S}_\text{D} \circ$ F.

DEUXIÈME EXERCICE **3,5 points**

1. Soit p un entier naturel premier. Trouver tous les entiers relatifs α vérifiant la congruence $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$.

   En déduire la résolution dans l'ensemble $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ de l'équation $x^2 = \dot{0}$.

   (a étant un entier la notation $\dot{a}$ désigne la classe de a, élément de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$).
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x^2 + \dot{16}x + \dot{15} = \dot{0}.$$

PROBLÈME **13 points**

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées indépendamment, sauf indication contraire du texte.*
Il sera tenu compte de la précision de la rédaction.

Soit E l'ensemble des nombres complexes différents de -1 ; 0 et 1.

A.

1. On pose :

$$e(z) = z \qquad f(z) = -\frac{1}{z}$$
$$g(z) = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1} \qquad h(z) = \frac{z+1}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z}$$

   Montrer que ces relations définissent des applications bijectives e, f, g, h de E dans E.
2. Soit G l'ensemble de ces quatre applications. Démontrer que G est un groupe commutatif pour la composition des applications.
3. On définit l'application φ de E dans $\mathbb{C}$ par $\varphi = e + f + g + h$. Quelles sont les applications composées : $\varphi \circ f$; $\varphi \circ g$; $\varphi \circ h$? L'application φ est-elle bijective ?
4. Étant donné un élément a de E, on veut résoudre dans E l'équation

$$\varphi(z) = \varphi(a) \qquad (1)$$

a. Indiquer sans calcul quatre solutions, distinctes ou non, de l'équation (1).

b. Montrer que l'équation (1) ne peut pas avoir plus de quatre solutions (on pourra admettre qu'un polynôme de degré n à coefficients complexes a au plus n racines distinctes dans $\mathbb{C}$).

c. Montrer que suivant la valeur de a, l'équation (1) admet, soit quatre solutions distinctes, soit une seule solution.

B.

On désigne par Ψ la restriction à l'ensemble $\mathbb{R} \cap$ E de l'application φ définie en A 3.

1. Étudier les variations de la fonction Ψ.

2. Dessiner avec soin sa représentation graphique Γ relativement à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

3. Dans le cas où a est réel, retrouver le résultat obtenu à la question A 4. c.

Dans le cas particulier $a = 2$, vérifier graphiquement les valeurs des solutions de l'équation (1).

4. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe Γ et par les droites $y = x$; $x = 3$; $x = 5$.

C

Étant donné un nombre complexe z, on définit les nombres complexes :

$$z_1 = f(z) \quad ; \quad z_2 = g(z) \quad ; \quad z_3 = h(z) \quad ; \quad z_4 = \varphi(z)$$

où f, g, h, φ sont les fonctions définies dans la partie A. On désigne respectivement par M, M_1, M_2, M_3, M_4 les images de z, dans un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\Omega,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

1. Soit F l'ensemble des éléments de E qui ont pour module 1. Si z est un élément de F, on désigne par θ la détermination de son argument appartenant à l'ensemble $]0\ ;\ \pi[\cup]\pi\ ;\ 2\pi[$.

Exprimer, en fonction de θ , les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 et donner pour chacun d'eux le module, et une détermination de l'argument.

2. En déduire les ensembles décrits respectivement par les points M_1, M_2, M_3, M_4 quand M décrit le cercle de centre Ω et de rayon 1, privé des points d'affixes -1 et 1.