

∞ Baccalauréat C Liban juin 1979 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

On donne la suite (q_n) , $n \in \mathbb{N}$ d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2.

On construit la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{q_0} \\ u_1 &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} \\ &\vdots \\ u_n &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

1. Montrer que la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, est croissante et peut être majorée par une suite convergente (ne dépendant pas exemple que de q_0).
En déduire que la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, a une limite, qui appartient à l'intervalle $]0; 1]$ de \mathbb{R} .
2. Montrer que si, pour tout entier n supérieur ou égal à l'entier k , $q_n = q_k$, la limite de la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, est un rationnel.

EXERCICE 2

4 POINTS

1. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, tracer la courbe C définie par : $2ay = x^2$, a réel positif donné.
2. Calculer la pente (ou coefficient directeur) de la tangente à la courbe C au point M_1 d'abscisse x_1 .
Quelle relation doivent vérifier x_1 et x_2 de deux points M_1 et M_2 de C pour que les tangentes à C en ces points soient orthogonales?
3. Démontrer que la droite $M_1 M_2$ déterminée par deux points de C ainsi associés passe par un point fixe qu'on placera sur la figure.
Déterminer l'ensemble décrit par l'intersection des tangentes à C en M_1 et M_2 .

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

\mathbb{C} désignant le corps des nombres complexes, on pose

$$j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

On vérifie que $1 + j + j^2 = 0$.

Soit F l'application polynôme de \mathbb{C} dans \mathbb{C}

$$z \longmapsto F(z) = z(z+1)(z-j^2) + \frac{2}{9}(j-4).$$

1. Déterminer les coefficients complexes a et b de façon que l'application σ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} :

$$z \mapsto \sigma(z) = az + b$$

vérifie les deux conditions :

$$\sigma(j^2) = 0, \quad \sigma(0) = -1.$$

Comparer alors $\sigma(-1)$ et j^2 .

2. On considère l'application s de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , dépendant du paramètre complexe m :

$$z \mapsto s(z) = mz - 1.$$

Peut-on déterminer m de façon que

$$(\forall z \in \mathbb{C}), \quad F[s(z)] = F(z)?$$

(On admet que deux applications polynômes sont égales si, et seulement si, les polynômes ordonnés ont les mêmes coefficients.)

Comparer au résultat du A 1.

3. Soit r l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} :

$$z \mapsto rz - 1.$$

Déterminer l'unique complexe z_0 invariant par r . Vérifier que $z_0^2 = -\frac{1}{3}j^2$.

Calculer $r \circ r \circ r$. Vérifier que, pour tout z dans \mathbb{C} muni de sa structure d'espace affine réel, z_0 est l'isobarycentre du triplet $(z, r(z), r^2(z))$.

4. Pour λ complexe, développer et ordonner $F(z_0 + \lambda)$. En déduire que l'équation $F(z) = 0$ admet trois racines complexes, préciser celles-ci et le situer sur une figure du plan complexe.

Partie B

Soit E un plan vectoriel réel (espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R}). Un endomorphisme f de E est dit ternaire si $f \circ f \circ f = \text{Id}_E$, application identique de E . (Dans la suite on notera $f \circ f \circ f = f^2 \circ f = f^3$, $f^3 \circ f = f^4$, etc.)

1. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme ternaire de E , et \vec{u} un vecteur non nul de E tel que le système $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ soit lié.

Montrer que $f(\vec{u}) = \vec{u}$. En déduire qu'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad h, k \text{ étant deux réels.}$$

Démontrer que f est nécessairement l'application identique. (On calculera A^3 .)

2. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E et que pour tout vecteur \vec{u} non nul de E , le système $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ soit libre. Soit \vec{u} un vecteur non nul de E , et $\vec{v} = f(\vec{u})$; alors il existe deux réels p, q tels que la matrice de f dans la base (\vec{u}, \vec{v}) soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}.$$

Calculer p et q de façon que f soit ternaire.

p et q ayant les valeurs trouvées, et Π désignant un plan affine attaché à E , démontrer analytiquement ou par tout autre procédé, que l'application affine g de Π dans Π admettant f comme endomorphisme associé admet un point invariant unique et vérifie $g \circ g \circ g = \text{Id}_{\Pi}$.

3. Plus généralement, soit F l'endomorphisme de E dont la matrice, dans une base (\vec{u}, \vec{v}) de E , est

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est un réel donné de l'intervalle $]0; \pi[$.

On définit sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par

$$\Phi(\vec{u}, \vec{u}) = 1, \quad \Phi(\vec{v}, \vec{v}) = 1, \quad \Phi(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\theta.$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur E , et que F est un endomorphisme orthogonal de l'espace euclidien (E, Φ) .

E étant supposé orienté par la base (\vec{u}, \vec{v}) , déterminer le vecteur \vec{w} de E de façon que (\vec{u}, \vec{w}) soit une base directe et orthonormée relativement à Φ .

Former la matrice de F dans cette nouvelle base.

Quelle est la nature de F dans (E, Φ) ? À quelle condition, n étant un entier donné supérieur ou égal à 3, a-t-on $F^n = \text{Id}_E$?