Baccalauréat C Lille septembre 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Étudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 5 de 12^n.
2. Les chiffres du système de numération à base douze sont notés $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \alpha,\ \beta$.

   Quel est le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier naturel qui s'écrit $\overline{4\beta32\alpha5}$ dans ce système ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. n étant un entier naturel non nul, calculer l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\pi} x\cos 2nx\,\mathrm{d}x.$$

2. Linéariser $\sin^6 x$.
3. Utiliser les questions précédentes pour calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\pi} x\sin^6 x\,\mathrm{d}x.$$

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre deux muni de l'addition des matrices et de leur multiplication par les réels, possède une structure d'espace vectoriel, et que, muni en plus de la multiplication interne des matrices, il possède une structure d'anneau unitaire.

On notera

$$\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble E des matrices $A = \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ b & -a \end{pmatrix}$ où $(a~;~b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ et qu'il admet pour base $(I~;~J)$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer J^2, et l'exprimer à l'aide de I et J. En déduire que J^2 appartient à E, que J est inversible, et que J^{-1} appartient aussi à E.
3. Montrer que si A et B sont éléments de E, leur produit $A\cdot B$ appartient à E.

   Montrer que E, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, possède une structure d'anneau unitaire commutatif.
4. Déterminer les éléments inversibles dans l'anneau E. On appelle E_1 l'ensemble de ces éléments. Montrer que E_1 est stable pour la multiplication. Quelle est la structure de E_1 muni de la multiplication ?
5. Résoudre dans E l'équation suivante où A est l'inconnue : $A^2 = I$.

Partie B

Le plan affine ($\mathscr{P}$) est muni d'un repère cartésien $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On considère l'application affine $f_{a,\,b}$ qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme associé a pour matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ b & -a \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ a pour image $M' = f_{a,\,b}(M)$ de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$.

1. **a.** Calculer x' et y' à l'aide de x et y ; $f_{a,\,b}$ peut-elle être une translation ? une homothétie ?

   b. Pour cette question on pose $a = 0, b = \dfrac{1}{4}$. Soit M_0 le point de coordonnées $(1~;~0)$. On pose :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} = f_{0,\,\frac{1}{4}}\left(M_n\right).$$

   On appelle $\left(x_n~;~y_n\right)$ les coordonnées de M_n.
   On pose $u_n = x_n - ky_n$ ($k \in \mathbb{R}$). Montrer qu'il existe deux valeurs de k (notées k' et k'') telles que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.
   Calculer $x_n - k'y_n$ et $x_n - k''y_n$ à l'aide de n. En déduire x_n et y_n.
   Calculer les limites de x_n et y_n quand n tend vers $+\infty$. Calculer la limite de $\dfrac{y_n}{x_n}$ quand n tend vers $+\infty$ (on vérifiera $x_n \neq 0$).
   On appelle G_n l'isobarycentre de M_0, $M_{l'1}, \cdots, M_n$. Calculer les coordonnées de G_n.
   Quelle est leur limite quand n tend vers $+\infty$?

2. **a.** a et b sont à nouveau quelconques.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que O, M et M' soient alignés.
   Montrer que, pour $b \neq 0$, cet ensemble est la réunion de deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, D_1 étant dirigée par $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ et D_2 par $\overrightarrow{e_2} = 2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$.
   Quelle est la restriction de $f_{a,\,b}$ à D_1 ? à D_2 ?

   b. On prend le nouveau repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$. Montrer que dans ce repère, l'expression analytique de $f_{a,\,b}$ est

   $$\left\{\begin{array}{lcl} X' &=& (a-\ b)X \\ Y' &=& (a+2b)Y. \end{array}\right.$$

   c. Pour quelles valeurs de a et b $f_{a,b}$ est-elle involutive ? Dans chaque cas trouvé indiquer la nature de $f_{a,b}$ et préciser ses éléments caractéristiques.

Partie C

Le plan ($\mathscr{P}$) est maintenant euclidien et le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est orthonormé (unité de longueur pour les graphiques : 2 cm sur chaque axe).

1. Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

   $$gx = \frac{4x^2 - 8x + 7}{4(2x-1)}$$

   Étudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (C) dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Montrer qu'elle admet un centre de symétrie et une asymptote oblique (il pourra être utile d'écrire $g(x)$ sous la forme $\alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{2x-1}\Big)$.

2. On considère l'application $f_{1,-1}$ (obtenue par $a = 1$, $b = -1$).

   a. En posant $M' = f_{1,-1}(M)$, donner une construction de M' à partir de M en utilisant D_1 et D_2.

   b. Soit (C′) l'image de (C) par $f_{1,-1}$. Écrire l'équation de (C′) dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Quelle est la nature de (C′) ?