Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Limoges juin 1979 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{llcl}
\bullet \text{ pour } & x \leqslant -\dfrac{1}{2} & f(x) & = & \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\\
\bullet \text{ pour } & -\dfrac{1}{2} \leqslant x < 1 & f(x) & = & \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}\\
\bullet \text{ pour } & x \geqslant 1 & f(x) & = & \dfrac{4}{\mathrm{e}^2} + \log x
\end{array}\right.$$

e étant la base des logarithmes.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels f est dérivable

2. Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$. (unité : 2 cm). :1. Calculer l'aire du domaine limité par $(\mathscr{C})$, l'axe $x'\mathrm{O}x$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$. En donner une valeur approchée avec 2 décimales.
On donne :

x	e^x	e^{-x}	$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$	$\log x$
2	7,389 1	0,135 3	1,648 7	0,606 5	0,693 1

PROBLÈME **12 points**

Partie A

On considère l'ensemble 0 : dl's nornbn's ("ompll'xI's, un plan affine euclidien ->-> oril'nll' P muni d'un repère orlhonormé, direct (0, i,j) el un n :el arbitraire m. :- ; ;oit l'application '" dl' 0 : dans 4 : qui, à tout l'ornpll'Xl' ?, associe Il' com- m pl('xe ?' ddini par ?' ri ! i a +] l'l l'application fm dl' l' dans P qui, à lout point M d'a l'fixe ?, associe Il : point M' d'affixe ?' = rn i ? + 1 Dist'uter suivant la valeur du n :I'1 m la natun : dl' fm. ·l'n :(·ist'r dans chaque cas ses l,ll ;mellts géomlétriques l'araetlTistiqut's. :2. Soit la t :Oniquc (C) du plan P d'l'quation x2 + 2) 2 - 2x = 0 . Soit (< :') l'irnagl' dl' (C) par f , rn (-tant dans el'ltt' qUI'stion Url fI"l'llIon m m nul. DOrlnl'r l'l'qualion dl' (C'm)' Préciser la nature dl' (C) el dl' (C'm) . 'l'rac(T sur UIII' rnt nw figurt· (C) el (< :'2) . Démontrer que les foyers dt, (Cm) sont les images par fm des fo) ers de (C) . :1. Soil wm le point de P invariant par fm (m réel quelconque). On pose 1T 1T -«P<- 2 2 tg <p avec
Montrer que les coordonnées de w s'expriment sous la forme : . m 1 + cos 2 <p x 2 sin 2 <p Y 2 Déterminer l'ensemble des points wm quand <p varie dans l'intervalle] - ;, i [. Préciser la natun'. de cd ensemble. ->-> 4, On considère dans le plan P muni du fI père orthonormé (0, i, j) un point mobile N. Ses coordonnées sont données en fonction du temps t par x et y . 1+ t2 avec tE [-1 , 1] . En utilisant les résultats de la

question précédente, préciser la trajectoire de N et la construire. Construire sur la même figure les vecteurs vitesse et accélération aux dates t = 1 et t = - 1 . Décrire le mouvement entre les dates t = - 1 et t = 1 d préciser les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

Partie B

E est un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
Le plan P de la partie A est le plan $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit g_m l'application de E dans E qui, à tout point M de E de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, associe le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ définies par

- $F_m(x+\text{i}y) = \left(x'+\text{i}y'\right)$ (F_m étant l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie au début de la partie A).
- et par $z' = mz$.

Dans toute cette partie m est un réel non nul.

1. Donner la définition analytique de g_m.

2. Déterminer l'image par g de l'hyperbole (H) du plan de repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ qui a pour equation dans ce repère $y^2 - z^2 = 1$.
Tracer l'hyperbole (H) et son image g_m(H) chacune dans un repère convenable à préciser.

3. Démontrer que g_m est la composée dans un ordre quelconque de l'homothétie de centre ω_m et de rapport m et d'une rotation que l'on précisera (ω_m étant le point de P défini au 3. A).