Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lyon juin 1979

EXERCICE 1 **3,5 points**

Soit E un espace veetoriel de dimension 3 rapporté à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère l'endomorphisme φ de E défini par

$$\left\{\begin{array}{l c l}
\varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & -6\overrightarrow{\imath} + 12\overrightarrow{\jmath} - 6\overrightarrow{k}\\
\varphi\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & -4\overrightarrow{\imath} + 8\overrightarrow{\jmath} - 4\overrightarrow{k}\\
\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) & = & \overrightarrow{0_{\text{E}}}.
\end{array}\right.$$

1. Déterminer le noyau de φ, en donner une équation cartésienne.
Déterminer l'image de φ, en donner une base.
Démontrer que le noyau et l'image de φ sont deux sous-espaces vectoriels suppémentaires de E.

2. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque de l'image de φ. Exprimer $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$ en fonction de $\overrightarrow{u}$.

3. Démontrer que φ est l'endomorphisme composé d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle à déterminer.

EXERCICE 2 **3,5 points**

On considère le système d'inconnue $(x\,;\,y)$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{l c l}
x - 2y & = & 3\\
ax - by & = & c
\end{array}\right.$$

ou a, b, c désignent trois paramètres éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Pour déterminer a, b, c on lance trois fois un dé cubique supposé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le premier numéro sorti donne a, le second b et le troisième c.

1. Donner un espace probabilisé fini associé à cette situation.

2. Calculer les probabilités :

- **a.** p_1 pour que le système ait une infinité de solutions ;
- **b.** p_2 pour qu'il n'ait aucune solution ;
- **c.** p_3 pour qu'il ait une solution unique ;
- **d.** p_4 pour qu'il admette la solution unique $(3\,;\,0)$.

  On donnera les résultats sous forme de fractions ayant 108 pour dénominateur.

PROBLÈME **13 points**

Soit a un réel strictement positif. Dans ce problème on cherche à résoudre dans $\mathbb{R}_+^\star$: l'équation

$$(\text{E}_a) \qquad a^x = x^a.$$

d'inconnue x et de paramètre a, équation qui admet évidemment la solution $x = a$.
Pour cela on utilise les fonctions

$$f_a : x \longmapsto x^a \quad g_a : x \longmapsto a^x \quad h_a : x \longmapsto x \log a - a \log x.$$

L'étude des fonctions f et g_a figurant au programme de Terminale C, le candidat pourra utiliser sans justification tout résultat concernant ces fonctions. Au besoin, il considèrera que la fonction f_a est prolongée par continuité au point 0 et que
$f_a(0) = 0$.

I - Étude de cas particuliers

1. On suppose $a = \text{e}$.
   a. Dresser le tableau des variations de la fonction h_{e}.
   b. En déduire la résolution de l'équation (E_{e}).
   c. Démontrer que l'on a $\dfrac{x}{\log x} \geqslant \text{e}$ pour tout $x > 1$.
2. On suppose $a = 2$.
   a. Dresser le tableau des variations de la fonction h_2 et la représenter graphiquement dans un plan muni d'un repère orthonormé en prenant 2 cm pour unité de longueur. On placera en particulier les points d'abscisses entières $n \leqslant 5$.
   b. En déduire que l'équation (E_2) admet exactement deux solutions.
   c. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par les courbes représentatives de f_2 et g_2 (supposées tracées avec le même repère orthonormé, mais on ne demande pas les courbes) et situé entre les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

II - Étude du cas $0 < a < 1$

1. Dresser le tableau des variations de la fonction $f_a - g_a$.
2. En déduire que l'équation (E_a) n'a pas d'autre solution que la solution a.

III - Etude du cas $a > 1$ et $a = 1 = \text{e}$

1. Dresser le tableau des variations de la fonction h_a.
2. Déduire de 1. et de la question (I - 1. c.) que h_a admet un minimum strictement négatif.
3. En déduire que l'équation (E_a) admet exactement deux solutions a et b.
4. Démontrer que l'on a toujours $b > 1$ et que l'on a $b < a$ si et seulement si $a > \text{e}$.

IV - Étude des solutions entières de (E_a) lorsque $a \in \mathbb{N}^\star - \{1\}$

Le cas $a = 2$ ayant été traité au I, on suppose ici que a est un naturel strictement supérieur à 2. Dans ce cas l'étude faite au III prouve l'existence d'un réel b vérifiant $a^b = b^a$ et $1 < b < a$.

On se propose de chercher si b est aussi un naturel.

1. Pour quelle valeur de a peut-on avoir $b = 2$?
   On suppose désormais $b \in \mathbb{N}$ et $b \geqslant 3$.
2. **a.** Prouver que a et b ont les mêmes diviseurs premiers.
   b. Soit p un diviseur premier commun à a et b , α et β ses exposants dans les décompositions respectives de a et b en facteurs premiers. Démontrer que $ab = \beta a$.
   c. Déduire de a. et b. que a est un multiple de b et que si $a = kb$, alors $b^{k-1} = k$.
   d. Démontrer que l'on a $b^{n-1} > n$ pour tout naturel $n \geqslant 2$.
   e. Conclure.