Baccalauréat C Montpellier juin 1979

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit f la fonct+ion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(x) & = & x\mathrm{e}^{1+2x} & \text{pour} & x \leqslant 0\\ f(x) & = & x(1-\log x) & \text{pour} & x > 0\end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Quatre nombres entiers strictement positifs a, b, c, d forment, dans cet ordre, une suite geométrique dont la raison est un nombre entier premier avec a.
Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation :

$$10a^2 = d - b.$$

PROBLÈME **3 POINTS**

I.

1. Soit λ un nombre complexe non nul. On considère la suite des nombres complexes : $S : \begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & \mathbb{C}\\ n & \longmapsto & z_n\end{array}$ définie par $z_0 = 0$ et la relation :

$$(1) \qquad z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   a. Calculer z z z z puis z en fonction dt' À . l' 2' 3' 4' . n . Étudier particulièrement les cas À = 1 , À. = - l .

   b. Deux termes de la suite S, d'indices différents, peuvent-ils être égaux ? Montrer que, dans l'affirmative, S t'st périodique.

   c. Démontrer la relation : (2) z 2 (l + À) z 1 n+ n+ Àz n pour tout nE IN Montrer qu'inversement, toute suite complexe
   (zn)ntlN vérifiant Zo = 0 , = i , d la relation (2) est égale à S .

2. On considère un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
   L'affixe d'un point M de coordonnées $(x ; y)$ est le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
   On donne des réels r, θ, tels que $r > 0$; $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.
   On notera u le nombre complexe de module r, d'argument 8 . On définit une suite de points (A) par les conditions : n nEIN Ao est l'origine du repère Al est le point d'affixe i Pour tout nE IN , le point A 2 est l'image de A 1 par la similitude n+ n+ de centre A , de rapport r, d'angle 8 . n

On note z l'affixe du pointA . n n Écrire une relation entre z , z l' Z 2' Muntrer. en utilisant la question J, que A 2 est l'image de A par une similitude indépendante n+ n de n dont on précisera le centre, le rapport f't l'angle. On suppose r = 2 cos 8 . Que pt!ut-on dire de la similitude ? La suite (An) peut-elle être périodique ? nEIN 1 4. On suppose maintenant r = –8-' Préciser dans ce cas les caractéristiques de la similitude . Démontrer que tous les points An appartiennent à l'une ou l'autre de deux $-_{.}droitesperpendiculaires, etquelesvecteursAAl'A1A2sontnn+n+n+$
$orthogonaux. Représentersurundessinlespoints Ao'Al'..., A5, ensupposant 8 = etenprenant 2cmpourur$

II.

4 eX - 2 eX + 1 Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative cr) dans le même repère que puur (C). Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g -1 ; déterminer g - x) . En déduire une particularité géométrique entre les courbes cr) et (C) . Soit la fonction réelle g de la variable réelle *x* définie par g(x)

III.

1. Vérifier que la fonction G définie par G(x) = - 2x + 6 Log (ex + 1) est une primitive de g . Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des x, la courbe cr) et les droites d'équatiuns x = 0 et x = Log (4) . En donner une valeur ' '10-2 ,
approchée a pres.

IV.

Soit le mouvement du point M défini par : x(t) 2 Log t 4 t2 - 2 t2 + 1 y(t) où l est strictement positif.

1. Quelle est la trajectoire du mouvement du point M ?

2. Donner les coordonnées des vecteurs vitesse V(t) et accélération r(t) du muuV/ :mt'nl du point M à l'instant 1. -+

3. Pour quelle valeur Lo de t le vecteur accélération r(to) est-il parallèle à l'axe des x '(Déterminer alors la position M(Lo) du point M sur la trajectoire, le vecteur vitesse Veto) et le vecteur accaération r(to) à l'instant