Baccalauréat C Montpellier septembre 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$5x - 4y = 1.$$

2. Un entier naturel n s'écrit $\overline{52}$ dans un système de numération de base x et $\overline{43}$ dans un autre système de base y.
Quelles sont les valeurs possibles de x et de y ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

À tout nombre complexe z on associe son image m dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
Pour tout nombre complexe z différent de i, on pose :

$$Z = \frac{2z - 4}{z - \mathrm{i}}$$

1. Comment choisir l'image m de z pour que Z soit réel ?
2. Comment choisir l'image m de z pour que Z ait pour argument $-\frac{\pi}{2}$?

On peut traiter cet exercice par le calcul ou par un raisonnement géométrique.

PROBLÈME **13 POINTS**

Les parties A et B sont deux exemples d'une même situation mathématique, dans un plan affine euclidien d'une part, en analyse d'autre part. Elles peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On donne un plan vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\, j\right)$.
On dira qu'un endomorphisme φ de E possède la propriété (A) lorsqu'il existe un réel $k \in]0 ; 1[$ tel que, pour tout $\vec{u} \in$E,

$$\left\|\varphi\left(\vec{u}\right)\right\| \leqslant k\left\|\vec{u}\right\|.$$

1. φ est défini par sa matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\, j\right)$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On pose $\vec{u} = r\cos\theta\,\vec{\imath} + r\sin\theta\,\vec{\jmath}$ $(r > 0 ; 0 \leqslant \theta < 2\pi)$.
Calculer en fonction de r et θ :

$$F(r, \theta) = \left\|\varphi\left(r\cos\theta\,\vec{\imath} + r\sin\theta\,\vec{\jmath}\right)\right\|^2.$$

et démontrer que φ possède la propriété (A), par exemple pour $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ on pourra mettre $F(r, \theta)$ sous la forme $A + B\cos 2\theta + C\sin\theta\cos\theta$.

2. Soit P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel E, muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et f une application affine de P dans P dont l'endomorphisme associé, noté φ, possède la propriété (A). 1_{E} est l'application identité de E. Démontrer que l'endomorphisme $\varphi - 1_{\text{E}}$ est bijectif.

   En déduire que f possède un point invariant et un seul, Ω, déterminé par l'équation :

$$\varphi\left(\overrightarrow{\text{O}\Omega}\right) - \overrightarrow{\text{O}\Omega} = \overrightarrow{\text{O}'\text{O}} \quad \text{où } \text{O}' = f(\text{O}).$$

   Soit M_0 un point du plan P. On définit la suite M_0, M_1, …, par :

$$M_n = f\left(M_{n-1}\right) \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

   Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\| = 0$.

3. On considère les suites numérique (x_n), $\left(y_n\right)$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & y_0 = 0 \\ x_n & = & \dfrac{2}{3}x_{n-1} - \dfrac{1}{3}y_{n-1} + 2 \\ y_n & = & \dfrac{1}{2}x_{n-1} + \dfrac{1}{2}y_{n-1} - 1 \end{array}\right.$$

   Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leurs limites,

Partie B

a est un réel strictement positif. On donne l'application :

$$\begin{array}{llll} f : &]0\ ;\ +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2}{3}x + \dfrac{a^3}{3x^2} \end{array}$$

1. Construire la courbe représentative. On étudiera particulièrement le point d'intersection avec la droite $y = x$ et la tangente en ce point.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; $x_0 > a$. On pose

$$x_n = f\left(x_{n-1}\right) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^\star$$

   Démontrer que l'on a :

$$a < x_n < x_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star$$

   Etablir l'inégalité :

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{a}(x - a) \quad \text{pour } x \geqslant a$$

   En déduire l'inégalité :

$$x_n - a \leqslant \frac{2}{a}\left(x_{n-1} - a\right)^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star$$

3. Démontrer une inégalité de la forme :

$$\frac{x_n - a}{a} \leqslant A_n \left(\frac{x_0 - a}{a}\right) u_n, \quad n \in \mathbb{N}^\star$$

où les A_n et les u_n sont des entiers que l'on déterminera en fonction de n.
On suppose $\dfrac{x_0 - a}{a} \leqslant \dfrac{1}{10}$. Quel est le plus petit entier n pour lequel $\dfrac{x_n - a}{a} \leqslant 10^{-8}$?