Baccalauréat C Montréal juin 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation en z :

$$(1) \qquad z^6 - 9\text{i}z^3 + 18 - 26\text{i} = 0$$

et l'équation en Z :

$$(2) \qquad Z^3 - 1 = 0.$$

1. Montrer que $(2+\text{i})$ et $(1-\text{i})$ sont des racines de l'équation (1).
2. Résoudre l'équation (2) .
3. Montrer que si z_0 est une racine de (1) et Z_0 une racine de (2), alors z_0Z_0 est une racine de (1). En déduire l'ensemble des racines de l'équation (1).

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \dfrac{\log x}{x}.$$

(log désignant le logarithme népérien).

1. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

   Calculer les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4 des points M_1, M_2, M_3, M_4 suivants :

   M_1 : intersection de $(\mathcal{C})$ et de l'axe $x'\text{O}x$,

   M_2 : point de $(\mathcal{C})$ où la tangente à $(\mathcal{C})$ passe par l'origine O du repère,

   M_3 : point de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à l'axe $x'\text{O}x$,

   M_4 : en x_4 la dérivée seconde de f s'annule.

   Démontrer que les nombres x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique.

PROBLÈME **13 POINTS**

Les questions C 1., 2., 3. et 4. peuvent être traitées indépendamment de celles qui précèdent

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que $\mathcal{M}$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que $\mathcal{M}$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire.

Partie A

Soit A, I, O les trois matrices de $\mathcal{M}$ suivantes :

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On désigne par E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par A et I, (c'est-à-dire : M est élément de E si et seulement si il existe deux nombres réels a et b tels que : $M = a\text{A} + b\text{I}$).

1. Montrer que (A, I) est une base de E.

2. Montrer que $A^2 + A - 12I = 0$.

Montrer que E, muni de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices, est un anneau commutatif unitaire.

Partie B

Soit P un plan vectoriel euclidien et $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée de P.

On notera φ_M l'endomorphisme de P dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est M.

1. Déterminer par leurs coordonnées dans la base (A, I) les matrices de E qui vérifient la relation :

$$M^2 = I.$$

2. Déterminer dans chaque cas la nature et les éléments de l'endomorphisme φ_M correspondant. On notera S_1 et S_2 les endomorphismes obtenus distincts de l'identité de P et de l'homothétie de rapport -1,

Partie C

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien associé à P et $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.

Soit f et g deux fonctions réelles de la variable réelle :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{12}\left(11x + 7\sqrt{x^2+2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{12}\left(11x - 7\sqrt{x^2+2}\right) \end{array}$$

1. Étudier les variations de f. Vérifier que les droites d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$ et $y = \dfrac{1}{3}x$ sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_1$ représentation graphique de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Construire $\mathcal{C}_1$.

2. Soit $\mathcal{C}_2$ la représentation graphique de g dans le même repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

(On ne demande pas l'étude des variations de g).

Soit Δ la droite affine dont une équation est $11x - 12y = 0$ et σ la symétrie affine de $\mathcal{P}$ par rapport à Δ dont la direction est la droite vectorielle engendrée par $\vec{\jmath}$.

Démontrer que $\mathcal{C}_2 = \sigma\left(\mathcal{C}_1\right)$.

Dessiner $\mathcal{C}_2$ sur la même figure que $\mathcal{C}_1$.

3. Soit $\mathcal{C}$ la réunion de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Montrer qu'un point N de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si :

$$(3x-2y)(x-3y) - \frac{49}{12} = 0.$$

4. Soit $\vec{u} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \quad \vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

Montrer que $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère de $\mathcal{P}$.

Quelle est l'équation de $\mathcal{C}$ dans ce repère ? Quelle est la nature de $\mathcal{C}$?

5. Soit Σ_1 et Σ_2 les applications affines de $\mathcal{P}$ qui laissent le point O invariant et dont les endomorphismes associés sont respectivement S_1 et S_2 définis en B 2.
Soit N un point de $\mathcal{P}$, N_1 son image par Σ_1, N_2 son image par Σ_2.
On désigne par $(X\ ;\ Y)$ les coordonnées de N dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, par $(X_1\ ;\ Y_1)$ celles de N_1 et par $(X_2\ ;\ Y_2)$ celles de N_2.
Exprimer X_1 et Y_1 en fonction de X et de Y.
Exprimer X_2 et Y_2 en fonction de X et de Y.
Montrer qe $\Sigma_1(\mathcal{C}) = \Sigma_2(\mathcal{C})$.