

## Baccalauréat C Nantes juin 1979

### EXERCICE 1

4 POINTS

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$f(z) = z^3 + (-7 + 3i)z^2 + (12 - 16i)z + 4(1 + 7i).$$

On considère

$$E = \{z; z \in \mathbb{C}, f(z) = 0\}.$$

1. Montrer que  $E$  contient un élément de la forme  $z_0 = \lambda i$  où  $\lambda$  est un réel.
2. Déterminer les éléments  $z_0, z_1, z_2$ , de  $E$  : on notera  $z_1$  l'élément de  $E$ , autre que  $z_0$ , qui a une même partie imaginaire que  $z_0$ .
3. Soit  $A, B, C$  les images respectives de  $z_0, z_1, z_2$  dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.  
Déterminer les éléments de la similitude directe qui transforme le bipoint  $(A, B)$  en le bipoint  $(A, C)$ .

### EXERCICE 2

4 POINTS

1. Soit deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ ; la première contient 6 boules blanches et 4 boules noires; la seconde contient 8 boules blanches et 2 boules noires.  
D'une des deux urnes, choisie au hasard (il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne :  
si la boule était blanche on recommence le tirage dans la même urne ;  
si la boule était noire on recommence le tirage dans l'autre urne.  
Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.  
Soit  $P_n$  la probabilité pour que le  $n$ -ième tirage se fasse dans l'urne  $U_1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).
  - a. Déterminer  $P_1$ .
  - b. Déterminer  $P_2$  : on se rappellera que le second tirage s'est fait dans  $U_1$  soit parce que le premier tirage a été d'une boule blanche dans  $U_1$ , soit parce que le premier tirage a été d'une boule noire dans  $U_2$ .
  - c. Démontrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite  $(P_n)$ , de la forme :

$$\forall n, n \geq 2: P_n = aP_{n-1} + b$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels que l'on déterminera.

2. Soit la suite réelle  $(u_n)$ , dont le terme général est défini pour tout  $n$  entier strictement positif par

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = \frac{2}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5} \quad \forall n, n \geq 2 \end{cases}$$

- a. Déterminer le réel  $\alpha$  tel que la suite  $(V_n)$ , dont le terme général est défini pour  $n$  entier strictement positif par  $V_n = u_n - \alpha$  soit une suite géométrique.
- b. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente; trouver alors la limite de  $P_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

## PROBLÈME

12 POINTS

## Partie A

Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels. Si  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathcal{E}$  et si  $\lambda$  est un réel, on note  $A + B$  la somme des matrices  $A$  et  $B$

$A \times B$  le produit de la matrice  $B$  par la matrice  $A$  dans cet ordre

$\lambda \cdot A$  le produit de la matrice  $A$  par le réel  $\lambda$ .

On rappelle que  $(\mathcal{E}, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et que  $(\mathcal{E}, +, \times)$  est un anneau unitaire, non commutatif, non intègre.

Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a; b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels.

1. Démontrer que  $(\mathcal{M}, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Préciser la dimension et une base de cet espace vectoriel.
2. Soit  $A = M(1; 0)$  et  $B = M(0; 1)$ . Calculer  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $A \times B$ ,  $B \times A$ . En déduire que  $(\mathcal{M}, +, \times)$  est un anneau unitaire, commutatif. Cet anneau est-il intègre ?
3. Soit  $\mathcal{M}_1$  l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau  $\mathcal{M}$ .
  - a. Déterminer  $\mathcal{M}_1$ .
  - b. Quelle est la structure de  $(\mathcal{M}_1, \times)$  ?

## Partie B

Soit  $\pi$  un plan vectoriel et  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  une base de ce plan.

On considère  $\varphi_{a,b}$  l'endomorphisme de  $\pi$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $M(a, b)$ .

1. Déterminer, suivant les valeurs de  $a$  et  $b$ , le noyau et l'image de  $\varphi_{a,b}$ .  
Dans chaque cas, on indiquera une base de ces espaces vectoriels, s'il en existe.
2. Déterminer les nombres réels  $k$  pour lesquels l'équation  $\varphi_{a,b}(\vec{u}) - k\vec{u} = \vec{0}$  (1)  
(dans laquelle le vecteur  $\vec{u}$  de  $\pi$  est l'inconnue) admet d'autres solutions que le vecteur  $\vec{0}$ .  
On explicitera, pour chacune des valeurs de  $k$  trouvées, l'ensemble des solutions de (1).
3. On pose  $\vec{I} = \vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{J} = \vec{i} + \vec{j}$ .  
Vérifier que  $\mathcal{B}' = (\vec{I}, \vec{J})$  est une base de  $\pi$ . Quelle est la matrice  $M$  de  $\varphi_{a,b}$  dans  $\mathcal{B}'$  ?
4. Déterminer les applications  $\varphi_{a,b}$  qui sont des projections vectorielles.  
Dans chacun des cas, on précisera les éléments caractéristiques de la projection trouvée en remarquant, le cas échéant, s'il s'agit ou non de sous-espaces vectoriels propres.
5. Déterminer les applications  $\varphi_{a,b}$  qui sont des automorphismes involutifs.  
Dans chacun des cas, on précisera les éléments caractéristiques de l'involution trouvée.

## Partie C

Soit  $P$  un plan affine associé à  $\pi$ , et soit  $O$  un point de  $P$ . On note respectivement  $(\mathcal{R})$  et  $(\mathcal{R}')$  les repères cartésiens  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et  $(O; \vec{I}, \vec{J})$ .

Soit  $O'$  le point de coordonnées  $(2; -2)$  dans  $(\mathcal{R})$ . Soit  $f$  l'application affine de  $P$  dont l'endomorphisme associé est  $\varphi_{\frac{1}{2}, 0}$  et qui transforme  $O$  en  $O'$ .

1. Définir la nature de  $f$  et donner ses éléments caractéristiques.
2. Si  $M$  a pour coordonnées  $(x; y)$  dans  $(\mathcal{R})$ , donner les coordonnées  $(X; Y)$  dans  $(\mathcal{R})$  de  $f(M)$ .
3. Si  $M$  a pour coordonnées  $(x'; y')$  dans  $(\mathcal{R})$ , donner les coordonnées  $(X; Y)$  de  $f(M)$  dans  $(\mathcal{R}')$ .

#### Partie D

On suppose maintenant que  $\pi$  est euclidien et que la base  $(\mathcal{B})$  est orthonormée.

Soit  $O''$  le point de coordonnées  $(1; 1)$  dans  $(\mathcal{R})$ .

Soit  $g$  l'application affine de  $P$  dont l'endomorphisme associé est  $\varphi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$  et qui transforme  $O$  en  $O''$ .

1.
  - a. Définir la nature de  $g$  et donner ses éléments caractéristiques.
  - b. Si  $M$  a pour coordonnées  $(x; y)$  dans  $(\mathcal{R})$ , donner les coordonnées  $(\xi; \eta)$  dans  $(\mathcal{R})$  de  $g(M)$ .
2. Soit  $(\mathcal{C})$  le sous-ensemble de  $P$ , d'équation dans  $(\mathcal{R})$   $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ .
  - a. Donner une équation dans  $(\mathcal{R})$  de l'image  $(\Gamma)$  de  $(\mathcal{C})$  par  $g$ . Représenter sur un même dessin les ensembles  $(\Gamma)$  et  $(\mathcal{C})$ .
  - b. Démontrer qu'il existe une rotation unique, centrée sur la droite de direction  $\vec{i}$  et passant par  $O$ , qui transforme  $(\mathcal{C})$  en  $(\Gamma)$ . Déterminer les éléments caractéristiques de cette rotation.