# Baccalauréat C Nice juin 1979

**EXERCICE 1** **4 POINTS**

On considère la fonction numérique d'une variable réelle $f$ définie par

$$f(x) = \log\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

où log désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On donne $\log 2 \approx 0,7$).
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}(2+x) - \text{Log}\, 2}{x}$ admet pour limite $\dfrac{1}{2}$ en 0.
3. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la portion du plan comprise entre la courbe ($\mathscr{C}$), la droite d'équation $y = \text{Log}2$, et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = \lambda$ où $\lambda$ est un nombre réel strictement inférieur à $-1$.
   Déterminer la limite éventuelle de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $-\infty$.

**EXERCICE 2** **3 POINTS**

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et A le point du plan complexe d'affixe $z = a + \text{i}b$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$).
On considère l'équation :

$$z^2 + (1 - b)z + a = 0.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$ et $b$, pour que l'équation admette une racine double.
   Représenter dans le plan complexe l'ensemble ($\Gamma$) des points A (d'affixe $a + \text{i}b$) correspondants.
2. Préciser suivant le position du point A dans le plan la nature des racines de l'équation.

**PROBLME** **13 POINTS**

**Partie A**

Soit $a$, $b$, $c$ trois nombres réels. On note $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in N^{\star}, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left[a\cos\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

   sachant que $f^{(n)}$ désigne la fonction dérivée $n$-ième de $f$.

   **b.** On pose $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, u_n = \dfrac{1}{4^n} f^{(2n)}(0)$.
   Calculer $u_1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in N^{\star}}$ , est une suite géométrique de raison $-\dfrac{\pi^2}{16}$.
   Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$ en fonction de $a$.

2. On pose $a = 4\alpha$, $b = 7\beta$, $c = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Écrire l'expression de $f(x)$.

   Déterminer l'ensemble des couples $(\alpha,\ \beta)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ tels que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

3. On pose $a = 1$, $b = c = 0$ et on note $\varphi$ la restriction de $f$ à $[0\,;\,2]$. Écrire l'expression de $\varphi(x)$.

   **a.** Montrer que $\varphi$ admet une fonction réciproque $\psi$.

   **b.** Quel est l'ensemble de définition de $\psi$ ? Préciser son sens de variation et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

   **c.** Sur quel ensemble $\psi$ est-elle dérivable ?

4. On pose $a = c = 0$, $b = 1$. Écrire l'expression de $f(x)$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

5. On appelle $f_1$ la fonction $f$ obtenue pour $a = 1$, $b = c = 0$.

   On appelle $f_2$ la fonction $f$ obtenue pour $a = c = 0$, $b = 1$. On considère

$$S_1 = \sum_{k=0}^{4} f_1\left(\frac{4k}{9}\right) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{4} f_2\left(\frac{4k}{9}\right).$$

   **a.** Exprimer $S_1 + \mathrm{i}S_2$ en fonction du nombre complexe $z$ de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{9}$.

   **b.** En déduire $S_1$.

**Partie B**

On note E l'ensemble des fonctions $f_{a,\,b,\,c}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,\,b,\,c}(x) = a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$$

avec $(a,\ b,\ c)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$.

1. On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Cet ensemble sera noté $\mathscr{F}$.

   **a.** Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.

   **b.** Déterminer la dimension de $E$.

2. On note $f \bullet g$ le réel $\dfrac{1}{4}[2f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(-1)g(-1)]$.

   **a.** Montrer que l'application : $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (f,\ g) & \longmapsto & f \bullet g \end{array}$ est un produit scalaire sur $E$.

   Dans toute la suite, on considérera $E$ muni de ce produit scalaire ; le réel $\sqrt{f \bullet f}$ sera noté $\|f\|$.

   **b.** Soit les fonctions :

$$e_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \qquad e_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) \end{array}$$

$$e_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) + 1 \end{array}$$

   Montrer que $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est une base orthonormée de E.

   Montrer que :

$$f_{a,\ b,\ c} = \left(\frac{a}{2} + c\right) e_1 + \frac{b\sqrt{2}}{2} e_2 - \frac{a}{2} e_3.$$

En déduire que :

$$f_{a,\ b,\ c} \bullet f_{a',\ b',\ c'} = \left(\frac{a}{2} + c\right)\left(\frac{a'}{2} + c'\right) + \frac{bb'}{2} + \frac{aa'}{4}.$$

**3.** On suppose que E est orienté et que $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est une base orthonormée directe.

Soit $\tau$ l'endomorphisme de E défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tau\left(e_1\right) & = & f_{0,\ 0,\ 1} \\ \tau\left(e_2\right) & = & f_{-1,\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{2}} \\ \tau\left(e_3\right) & = & f_{-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{array}\right.$$

Montrer que $\tau$ est une isométrie vectorielle dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

**4.** Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(\mathscr{R})$.

Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $(\mathscr{R})$ tels que les vecteurs $f_{y,\ x,\ 1}$ et $f_{2y,\ \frac{2}{3}x,\ -\frac{y}{2}}$ de E soient orthogonaux.

Représenter cet ensemble dans $(\mathscr{R})$.