Baccalauréat C Nice septembre 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère la fonction numérique d'une variable réelle, f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}}x - \mathrm{Log}\, x$$

où e est la base du logarithme népérien, noté Log.

1. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé.
2. Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < \mathrm{e}$.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan déterminé par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des x, et les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = \mathrm{e}$.
3. Déterminer la limite éventuelle de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On joue avec deux dés cubiques non pipés.
Les faces de l'un sont marquées : 0, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.
Les faces de l'autre : 0, 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$.
On lance les deux dés simultanément. On appelle α et β les nombres qui apparaissent sur les faces supérieures, et on appelle X la variable aléatoire réelle qui à chaque lancer associe le réel $\sin(\alpha + \beta)$.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ? (On pourra présenter les résultats sous forme de tableau).
2. Établir la loi de probabilité de X, et calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit E un plan affine rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit g_t l'application affine de E dans E, qui au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'\,;\,y')$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x\cos t + 2y\sin t.\\ y' &=& \frac{1}{2}x\sin t - y\cos t \end{array}\right. \quad \text{ou } t \text{ est un nombre réel}$$

1. Démontrer que g_t est involutive et que c'est une symétrie dont on déterminera les éléments géométriques.
2. Soit s la symétrie d'axe Ox, de direction Oy. Déterminer analytiquement $g_t \circ s$.

Partie B

Soit f_t l'application affine de E dans E, qui au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' & = & x\cos t - 2y\sin t.\\ y' & = & \dfrac{1}{2}x\sin t + y\cos t\end{array}\right. \qquad \text{ou } t \text{ est un nombre réel}$$

On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f_t pour t élément de $\mathbb{R}$.

1. Soit φ l'application définie par :

$$\begin{array}{l c c c}\varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{F}\\ & t & \longmapsto & f_t\end{array}$$

Démontrer que φ est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R},\,+)$ dans $(\mathcal{F},\,\circ)$.
Démontrer que $(\mathcal{F},\,\circ)$ est un groupe commutatif. Quelle est l'application réciproque de f_t ?

2. Déterminer l'ensemble K des nombres réels t tels que

$$\varphi(t) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$$

(id_{E} est l'application identique de E dans E).
Quelle relation doit exister entre t et t' pour que $f_{t'} = f_t$?

3. n désignant un entier naturel non nul, on pose :

$$\left\{\begin{array}{l c l}f_t^1 & = & f_t\\ f_t^n & = & f_t^{n-1}\circ f_t \quad \forall n \geqslant 2\end{array}\right.$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $f_t^n = f_{nt}$.
On donne à t la valeur $t_0 = \dfrac{3}{5}2\pi$.
Trouver le plus petit entier n tel que $f_{t_0}^n = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

4. On a toujours $t_0 = \dfrac{3}{5}2\pi$.
On appelle Γ l'ensemble des cinq points $\{M_0,\,M_1,\,M_2,\,M_3,\,M_4\}$ où M_0 a pour coordonnées $\left(x_0\,;\,y_0\right)$

$$\begin{array}{l c l}M_1 & = & f_{t_0}\left(M_0\right)\\ M_2 & = & f_{t_0}\left(M_1\right)\\ M_3 & = & f_{t_0}\left(M_2\right)\\ M_4 & = & f_{t_0}\left(M_3\right)\end{array}$$

   a. Démontrer que Γ est stable par f_t.
   b. On appelle $(\mathcal{C}_a)$ la courbe d'équation $x^2 + 4y^2 = a^2$, a étant un nombre réel.
   Démontrer que, quel que soit t appartenant à $\mathbb{R}$, $(\mathcal{C}_a)$ est invariante par f_t.
   c. Démontrer que Γ est contenu dans la courbe $(\mathcal{C}_a)$ pour la valeur $a = x_0^2 + 4y_0^2$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose E euclidien et le repère $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ orthonormé.

1. Dans cette question $a = x_0^2 + 4y_0^2$ et $t_0 = \dfrac{3}{5}2\pi$.
Écrire l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_a)$ au point M_0. Quelle est l'image de cette tangente par f_t ?

2. Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et soit M_t l'image de A par f_t. Déterminer l'ensemble (G) des points M_t lorsque f_t varie dans $\mathcal{F}$. Représenter (G).

Partie D

F est un espace affine euclidien de dimension trois, rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit P le point mobile dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont à l'instant t

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \cos t\\ y &=& \dfrac{1}{2}\sin t\\ z &=& \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t\end{array}\right. \qquad \text{où } t \text{ appartient à } \mathbb{R}$$

Montrer que la trajectoire de P est un cercle, intersection d'une sphère (Σ) et d'un plan (π) à déterminer.
Quelle est la nature du mouvement de P ?