

❧ Baccalauréat C Orléans–Tours juin 1979 ❧

EXERCICE 1

4 POINTS

On considère le nombre complexe $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$.

1. On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.
Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.
2. Calculer $S + T$, ST puis en déduire S et T .

EXERCICE 2

4 POINTS

1.
 - a. Trouver tous les couples (p, q) d'entiers relatifs tels que $11p - 9q = 2$.
 - b. En déduire les entiers relatifs X qui vérifient

$$\begin{cases} X \equiv -1 & [9] \\ X \equiv -3 & [11]. \end{cases}$$

2. Soit $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$ un nombre entier naturel écrit en base dix.
 - a. Quelles relations doivent vérifier $a_n a_{n-1} \cdots a_0$ pour que N soit divisible par 99?
 - b. Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier $N = \overline{10x0009y}$ soit divisible par 99.

PROBLÈME

12 POINTS

Dans tout le problème, P désigne un plan affine euclidien, \vec{P} le plan vectoriel associé à P , (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé de P .

Partie A

1. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de g ; en déduire les variations de g , démontrer que g permet de définir une bijection de \mathbb{R} sur $] -1 ; 0[$.

2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}.$$

Étudier la fonction f ; étudier la position de la courbe représentative de f , \mathcal{C}_f , par rapport à ses asymptotes, puis construire \mathcal{C}_f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(On représentera l'unité par deux centimètres.)

3. Déduire de l'étude précédente l'existence d'un intervalle E de \mathbb{R} , à préciser, tel que f permette de définir une bijection de \mathbb{R} sur E .

Vérifier que la bijection réciproque (que l'on notera abusivement f^{-1}) est telle que, pour tout x de E : $f^{-1}(x) = \frac{1}{4(x-1)} + 1 - x$; tracer la courbe de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ représentant f^{-1} dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .

4. Justifier l'existence des réels suivants :

$$A = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx, \quad B = \int_{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} f^{-1}(x) \, dx, \quad C = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

- a. Calculer B, interpréter graphiquement le réel B.
- b. En déduire C, puis A.

Partie B

Dans cette partie, \vec{P} est orienté, et (\vec{i}, \vec{j}) est une base orthonormée directe.

1. Établir une équation cartésienne de \mathcal{C}' , image de \mathcal{C}_f par la symétrie de centre Ω ayant pour coordonnées $(0; 1)$.
2. En déduire une équation cartésienne de $H = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_f$ et construire H dans P rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
3. Soit s l'application affine de P dans P qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})z + i$.

On note φ l'endomorphisme de \vec{P} associé à s .

- a. Quelle est la nature de s ? Donner ses éléments caractéristiques.
- b. Vérifier que $\Omega = s(O)$; soit $\vec{I} = \varphi(\vec{i})$, $\vec{J} = \varphi(\vec{j})$.

Établir une équation cartésienne de H dans le repère $(\Omega; \vec{I}, \vec{J})$.

En déduire la nature de H.