Baccalauréat C Orléans–Tours septembre 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{x}$$

et tracer sa représentation graphique.

2. Montrer qu'il y a un unique couple $(x~;~y)$ d'entiers naturels non nuls tels que :

$$x^y = y^x \quad \text{et} \quad x < y.$$

3. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose

$$u_n = \frac{\operatorname{Log} 3}{3} + \frac{\operatorname{Log} 4}{4} + \cdots + \frac{\operatorname{Log} n}{n}$$

   a. Comparer u_n à $\displaystyle\int_3^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

1. Dans le système décimal, déterminer le chiffre des unités de 2^n et de 7^n, suivant les valeurs de l'entier naturel n.
2. Application : Trouver le chiffre des unités du nombre $3\,548^9 \times 2\,537^{31}$?

PROBLÈME **13 POINTS**

Les notations et résultats donnés dans l'énoncé du 1 sont utiles dans les questions 2, 3, 4 de **B**.

Soit $\jmath$ le nombre complexe $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On pourra utiliser sans la démontrer l'égalité $1 + \jmath + \jmath^2 = 0$.

Partie A

$\mathbb{C}$ et considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathcal{B} = (1~;~\mathrm{i})$.
Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le complexe $\varphi(z) = x + \jmath y$.

1. Montrer que φ est une application linéaire bijective.
2. Pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, on pose $N(z) = |\varphi(z)|^2$.
   Montrer que $N(x + \mathrm{i}y) = x^2 - xy + y^2$.
3. Soit Ω l'ensemble des complexes z vérifiant $N(z) = 1$.

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \quad N(z) = 1$$

   Soit Ω' l'ensemble des éléments de Ω dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont des entiers relatifs.

$$\Omega' = \{z \in \Omega, \quad \exists (x~;~y) \in \mathbb{Z}^2 \quad z = x + \mathrm{i}y$$

a. Montrer que si $z = x + \text{i}y$ appartient à Ω', alors

$$|x| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |y| \leqslant 1$$

b. En déduire que Ω' est formé de six éléments que l'on déterminera.

c. Déterminer $\varphi\left(\Omega'\right)$. Donner le module et un représentant de l'argument de chaque élément de $\varphi\left(\Omega'\right)$.
Montrer que $\varphi\left(\Omega'\right)$ est un groupe multiplicatif commutatif.

Partie B

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Un point M de $\mathscr{P}$ est repéré par ses coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $\mathscr{R}$ ou par son affixe $z = x + \text{i}y$.

1. Montrer que l'image d'une ellipse de foyers F et F$'$, de grand axe de longueur $2a$ par une isométrie affine est une ellipse dont on précisera les foyers et la longueur du grand axe.

2. Soit E l'ellipse dont une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ est

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

a. Déterminer les foyers et la longueur du grand axe de E.

b. Trouver une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ de l'image de E par la rotation de centre O et dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{4}$ (en radians).

c. On appelle Γ (resp. Γ') l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont l'affixe appartient à Ω (resp. Ω') (Ω et Ω' définis au 1).
Déduire du b. la nature de Γ. Dessiner Γ et Γ'.

3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$$

une matrice à coefficients réels, de déterminant égal à 1.
Soit F l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que $F(0) = 0$ et dont l'application linéaire associée a pour matrice A dans la base $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$.
(Si M a pour affixe z, on notera $f(z)$ l'affixe de $F(M)$.

a. Montrer que, pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, $N(f(z)) = N(z)$. En déduire que $F(\Gamma)$ est inclus dans Γ.

b. Montrer que pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$ on a

$$\varphi(f(z)) = (a + \jmath b)\varphi(z).$$

En déduire que, pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$

$$(\varphi \circ f\varphi^{-1}(z) = (a + \jmath b)z.$$

c. Soit ϕ l'application ponctuelle associée à l'application complexe φ. (Si M a pour affixe z, $\phi(M)$ a pour affixe $\varphi(z)$.
Déduire du b. la nature de l'application $\phi \circ F \circ \phi^{-1}$. En préciser les éléments caractéristiques.

d. Soit G une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$. On pose $G^1 = G$ et pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^\star$, on a $G^{n+1} = G \circ G^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que G^n est égale à l'application identique de $\mathscr{P}$ si et seulement si $\phi \circ G^n \circ \phi^{-1}$ est égale à l'application identique de $\mathscr{P}$.

4. Soit A_0 le point de coordonnées (1 ; 0) dans $\mathscr{R}$. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^\star$, on pose $A^n = F^n(A_0)$.

Soit S l'ensemble des points A^n lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

a. Montrer que, si $a = b = 1$, alors $S = \Gamma'$.

b. Montrer que S est inclus dans Γ' si et seulement si $a + \mathrm{i}b$ appartient à Ω'. Préciser l'ensemble des éléments de Ω' pour lesquels l'inclusion est une égalité.