Baccalauréat C Paris juin 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a\ ;\ b\}$ vérifiant

$$m - 18d = 791$$

où m est le P. P. C. M. et d le P. G. C. D. des nombres a et b.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Le but de cet exercice est le calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout entier naturel n on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1} x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right],\quad \frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}.$$

   En déduire le calcul de I_0.
2. Montrer, par une intégration par parties, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}.$$

3. En déduire le calcul de I.

N.B. On ne donnera pas de valeur décimale approchée de I_0 ou de I.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
À tout point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère choisi, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ qu'on appelle son affixe.
Soit F l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes) qui à z fait correspondre

$$z' = \frac{z}{1+|z|}.$$

et soit Φ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z'.
Pour les figures et les représentations graphiques on pourra prendre 2 cm d'unité.

Partie A

1. On pose $z_1 = -2$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.
   Soit M_1 et M_2 les points d'affixes z_1 et z_2. Déterminer $z_1' = F(z_1)$, $z_2' = (z_2)$ et placer sur une figure $\mathcal{F}$ les points M_1, M_2, $M_1' = \Phi(M_1)$, $M_2' = \Phi(M_2)$.

2. **a.** Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$$

Étudier les variations de f ; on étudiera en particulier la continuité et la dérivabilité.

Représenter graphiquement f dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\Omega\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$; déterminer les asymptotes.

b. On désigne par $\mathcal{D}_0$ la droite $\left(\text{O},\,\vec{u}\right)$ de $\mathcal{P}$. Montrer que $\Phi\left(\mathcal{D}_0\right)$ est une partie de $\mathcal{D}_0$ que l'on déterminera ; montrer que la restriction de Φ à $\mathcal{D}_0$ est une application injective.

Si M et N sont deux points distincts de $\mathcal{D}_0$, quelle est l'image par Φ du segment $[MN]$?

3. Soit r une rotation de $\mathcal{P}$ de centre O. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{P}$

$$\Phi[r(M)] = r[\Phi(M)].$$

(On pourra associer à r une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, de la forme $z \longmapsto az$, a nombre complexe convenable).

4. Déterminer $\Phi(\mathcal{P})$; montrer que l'application F est injective.

De même déterminer $F(\mathbb{C})$ et montrer que F est injective.

Partie B

Soit Δ l'application de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui au couple $(M,\,N)$ de points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectifs $(m,\,n)$ fait correspondre

$$\Delta(M,\,N) = |F(m) - F(n)| = \left|\frac{m}{1+|m|} - \frac{n}{1+|n|}\right|.$$

1. M_1 et M_2 étant définis en A 1, calculer :

$$\Delta\left(\text{O},\,M1\right),\,\Delta\left(\text{O},\,M_2\right),\,\Delta\left(M_1,\,M_2\right).$$

(On pourra contrôler les calculs sur la figure $\mathcal{F}$.)

2. Vérifier que :

a. Pour tout $(M,\,N)$ de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$:

$$\Delta(M, N) = 0) \iff (M = N);$$

b. Pour tout (M, N) de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$:

$$\Delta(M,\,N) = \Delta(N,\,M);$$

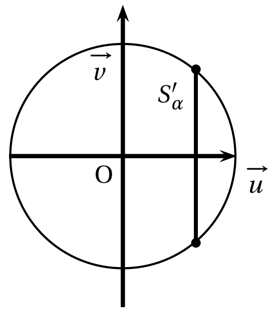
c. Pour tout (M, N, P) de $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$:

$$\Delta(M,\,P) \leqslant \Delta(M,\,N) + \Delta(M,\,P).$$

3. Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dont les éléments sont les réels de la forme $\Delta(M,\,N)$ où $M \in \mathcal{P}$, $N \in \mathcal{P}$, admet un plus petit majorant que l'on précisera.

Partie C

Soit C le cercle de centre O et de rayon 1.
Soit un réel $\alpha \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et soit S'_α la corde du cercle privée de ses extrémités et perpendiculaire à la droite $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u}\right)$ au point d'abscisse $\cos\alpha$.
On se propose d'étudier la partie S_α de $\mathscr{P}$ formée des points dont l'image par Φ appartient à S'_α.



1. M' étant l'image de M par Φ, calculer les coordonnées $\left(x'\,;\ y'\right)$ de M' en fonction des coordonnées $(x\,;\ y)$ de M. Former la relation (E) à vérifier par les coordonnées $(x\,;\ y)$ de M pour que son image M' appartienne à S'_α.
2. Déterminer S_α et tous ses éléments géométriques. Le candidat au le choix entre les deux méthodes suivantes :
   a. Traduire la relation (E) en termes de distances. (En particulier on pourra considérer la distance de M à un droite convenable).
   b. S_α est une partie d'une conique dont on formera une équation cartésienne que l'on réduira.
3. Construire $S_{\frac{\pi}{3}}$ et placer ses éléments géométriques.