Baccalauréat C Paris–Créteil–Versailles septembre 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on donne par leurs coordonnées le système de points : A(0 ; 1), B(1 ; 0), C(−1 ; 0). Ces points sont pondérés et affectés des coefficients respectifs 1, b, c.

1. Discuter l'existence du barycentre G de ce système de points suivant les valeurs de b et c.
   Quelles sont alors les coordonnées de G ?
2. Le couple $(b\,;\,c)$ est obtenu de la manière suivante :
   b est le résultat du premier jet d'un dé dont les faces portent les nombres -3, -2, -1, $+1$, $+2$, $+3$;
   c est le résultat du deuxième jet du même dé.
   Chaque couple a la même probabilité d'apparition.
   a. Quelle est la probabilité pour que le système de points pondérés admette un barycentre G dont l'ordonnée est égale à 1 ?
   b. Question analogue en imposant au barycentre G d'avoir une abscisse nulle.
   c. Question analogue en imposant au barycentre G d'appartenir à l'une ou l'autre des bissectrices des axes du repère.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit un plan affine euclidien orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On donne le nombre complexe $a = \cos\theta + \text{i}\sin\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$ et on désigne par F l'application de P dans lui-même qui au point M d'affixe le nombre complexe z associe le point M' d'affixe $z' = z + az$.

1. On désigne par M_1 le point d'affixe $a\overline{z}$. Donner la nature et la détermination géométrique de l'application F_1 de P dans P qui transforme M en M_1.
2. Montrer que F est la composée de deux applications simples que l'on précisera.
   Déterminer F(P) (on pourra construire sur une figure les points M, M_1, M′).
3. Déterminer l'ensemble des images dans P des solutions de l'équation :
   $$z + a\overline{z} = 2\left(\cos\frac{\theta}{2} + \text{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
   soit en utilisant la transformation F, soit par le calcul.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \text{Log}\left(\frac{\text{e}^{x} + \text{e}^{-x}}{2}\right)$$

où Log désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Étudier les variations de f et montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

2. Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, tracer la courbe C d'équation $y = f(x)$. Déterminer les asymptotes de C.

Partie B

On désigne par t la dérivée de f : $t = f'$.

1. **a.** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $|t(x)| < 1$.

b. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $t'(x) = 1 - [t(x)]^2$, en désignant par t' la dérivée de t.

c. Montrer que si $x \in]-1~;~+1[$, il existe un réel unique X tel que $t(X) = x$; on explicitera X en fonction de x et on notera $X = t^{-1}(x)$.
Montrer que $t(\mathbb{R}) =]-1~;~+1[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $X \in \mathbb{R}_+$. On pose :

$$I_n(X) = \int_0^X [u(t)]^n\,\mathrm{d}u = \int_0^X \left[f'(u)\right]^n\,\mathrm{d}u.$$

On conviendra que, pour tout u de l'intervalle $[0~;~X]$, $[t(u)]^0 = 1$.

a. Justifier l'existence de $I_n(X)$.

b. Calculer $I_0(X)$ et $I_1(X)$.

c. La question B 1. b donnant $[t(u)]^2 = 1 - t'(u)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$I_n(X) = I_{n-2}(X) - \frac{1}{n-1}[t(X)]^{n-1}.$$

d. Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$

$$I_{2p}(X) = X - \left[t(X) + \frac{1}{3}[t(X)^]3 + \ldots + \frac{1}{2p-1}[t(X)]^{2p-1}\right] \quad (\text{E}_1)$$

$$I_{2p+1}(X) = \text{Log}\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}[t(X)]^2 + \ldots \frac{1}{2p}[t(X)]^{2p}\right] \quad (\text{E}_2)$$

e. Montrer que l'on a pour tout entier naturel p :

$$0 \leqslant \int_0^X [t(u)]^{2p}\,\mathrm{d}u \leqslant X[t(X)]^{2p}$$

En déduire, X étant fixé, que la suite :

$$p \longmapsto \int_0^X [t(u)]^{2p}\,\mathrm{d}u$$

est convergente et donner sa limite.

Partie C

1. En utilisant la relation (E_1) et en posant $X = t^{-1}(x)$, démontrer que pour tout x fixé, $x \in [0~;~1[$, la suite $p \longmapsto \epsilon_p(x)$ définie par :

$$t^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + \epsilon_p(x) \quad (\text{E}_3)$$

a pour limite 0.
En déduire un résultat analogue pour $x \in]-1~;~O[$.

2. En utilisant la relation (E_3) pour $x = \dfrac{1}{3}$ et $p = 3$, donner une valeur approchée a de Log 2 ; comparer à la valeur obtenue dans les tables ; donner une majoration de Log $2 - a$.