Baccalauréat C Rennes juin 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit K l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
On note E l'ensemble des entiers naturels s'écrivant en base dix $\overline{ababab}$ où $(a,\ b)$ est un couple quelconque de K^2.

1. Quel est le nombre d'éléments de E ?
2. Si $n = \overline{ababab}$, démontrer que $\overline{ab}$ divise n.
3. Quel est le plus grand diviseur commun à tous les éléments de E ?
   Quelle est la somme des éléments de E ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère dans un plan affine euclidien orienté un triangle isocèle ABC rectangle en A tel qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ soit $\dfrac{\pi}{2}$.
On appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C et T la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.

1. Déterminer $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$ (nature et éléments caractéristiques).
2. Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 son image par F_2. Quelle set la nature du quadrilatère BC$M_1 M_2$?

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A - Préliminaire

Soit E la fonction qui à tout réel x, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x, et g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - \text{E}(x)$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \text{E}(x + K) = \text{E}(x) + K$.
En déduire que g est périodique.
Représenter graphiquement g (en repère orthonormé) sur l'intervalle $[-1\ ;\ +1[$ de $\mathbb{R}$.
Étudier la continuité de g au point 0.

Partie A - Les parties I et II, qui suivent, sont indépendantes

Soit F l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On rappelle que F muni de l'addition des applications, et de la multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On note $f_1,\ f_2,\ f_3$ les éléments de F définis par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1(t) & = & \text{E}(t) \\ f_2(t) & = & 2^{t-\text{E}(t)} \\ f_3(t) & = & 2^{2(t-\text{E}(t))} \end{array}\right.$$

où E est la fonction définie dans le préliminaire.
On appelle H le sous-espace vectoriel de F engendré par $f_1,\ f_2,\ f_3$.

I

1. Soit $B = \left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)$. Démontrer que B est une base de H.

2. Soit ψ l'application linéaire de H vers H définie dans la base B de la façon suivante : un vecteur quelconque f de coordonnées (x, y, z) a pour image $\psi(f)$ de coordonnées $\left(x', y', z'\right)$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y+3z \\ y' & = & -3x+4y+9z \\ z' & = & x-y-2z \end{array}\right.$$

   Montrer que ψ est une projection vectorielle dont on précisera les caractéristiques géométriques.

3. Soit $f = xf_1 + yf_2 + zf_3$ un élément de H . Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $x,\ y,\ z$ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

   En déduire que $\psi(H)$ l'image de H par ψ est aussi le sous-espace vectoriel des applications de H continues sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que les applications de H dérivables sur $\mathbb{R}$ constituent un sous-espace vectoriel D de H inclus dans $\psi(H)$.

II

Soit h l'élément de H défini par : $h = f_1 - 2f_2 + f_3$.

1. **a.** Montrer que, pour tout k élément de $\mathbb{Z}$, la courbe représentative Γ de h dans un repère cartésien $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est invariante par la translation T_k de vecteur $V_k = k\left(\overrightarrow{\imath}\ i + \overrightarrow{\jmath}\right)$.

   b. Établir le tableau de variations de h sur $[0\,;\,1]$ et étudier la dérivabilité de h à droite en 0 et à gauche en 1.

   Représenter graphiquement la restriction de h à l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$ (le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ sera orthonormé, et on prendra 2 cm pour unité).

2. Démontrer que h est intégrable sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et calculer pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$U_n = \int_n^{n+1} h(t)\,\text{d}t.$$

   Démontrer que la suite de terme général U_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

   Retrouver ce dernier résultat en donnant une interprétation graphique de U_n.