

## Baccalauréat C Rouen juin 1979

### EXERCICE 1

3 POINTS

On dispose de deux dés cubiques dont chaque face a la même probabilité d'apparaître après un lancer.

L'un a une face numérotée 0, deux faces numérotées 1, trois faces numérotées 2; l'autre a trois faces numérotées 0, deux faces numérotées 1, une face numérotée 2.

1. On définit une variable aléatoire,  $X$ , par la somme des numéros de la face supérieure de chaque dé après un lancer simultané.  
Déterminer la loi de probabilité de  $X$ , calculer son espérance mathématique et sa variance.
2. Pour chaque lancer simultané des deux dés, on appelle succès la réalisation d'une somme égale à 4. On effectue  $n$  lancers des deux dés.  
Calculer  $n$  tel que l'espérance mathématique du nombre de succès soit égale à 1.

### EXERCICE 2

4 POINTS

1. Calculer  $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$ .
2. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- a. Étudier les variations de  $f$ . Dessiner la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (On se contentera de déterminer les points de la courbe d'abscisses  $-1, 0$  et  $1$  et les tangentes à la courbe en ces points; on ne demande pas d'étudier les branches infinies).
- b. Dire pourquoi  $f$  admet une application réciproque  $g$  dont on déterminera le nombre dérivé pour la valeur  $y_0 = f(x_0)$  en fonction de  $y_0$ .
- c.  $y$  étant un réel fixé, résoudre  $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ .  
En déduire l'expression de  $g$  puis retrouver  $g'(y_0)$ .

### PROBLÈME

13 POINTS

Soit  $E$  un plan vectoriel réel,  $P$  un plan affine de direction  $E$  et  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère de  $P$ .

On considère les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}).$$

et les points  $I, A$  et  $B$  de coordonnées respectives :

$$\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \quad \left(0\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(0\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On désigne par :

- $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  les droites vectorielles engendrées respectivement par  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  ;
- $D_1$  et  $D_2$  les droites affines contenant  $I$  et de directions respectives  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

**Partie A**

1. a. Démontrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $E$ .  
 b. On appelle  $p_1$  la projection vectorielle sur  $\Delta_1$  de direction  $\Delta_2$  et  $p_2$  la projection vectorielle sur  $\Delta_2$  de direction  $\Delta_1$ . Démontrer que :

$$p_1 + p_2 = \text{Id}_E, \quad p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = \theta_E \quad \text{et} \quad p_1 \circ p_1 = p_1.$$

( $\text{Id}_E$  est l'application identique de  $E$  et  $\theta_E$  l'application nulle de  $E$ ).

2. À tout nombre réel  $k$  non nul, on associe l'endomorphisme de  $E$ ,

$$\varphi_k = k \cdot p_1 + \frac{1}{k} \cdot p_2$$

et on désigne par  $\Phi(E)$  l'ensemble des  $\varphi_k$  lorsque  $k$  décrit  $\mathbb{R}^*$ .

- a. Démontrer que  $\varphi_k(\vec{e}_1) = k \cdot \vec{e}_1$  et  $\varphi_k(\vec{e}_2) = \frac{1}{k} \cdot \vec{e}_2$ .  
 b. En déduire que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \rightarrow & \Phi(E) \\ k & \mapsto & \varphi_k \end{array}$$

est bijective.

- c. Exprimer  $\varphi_k \circ \varphi_{k'}$  en fonction de  $k, k', p_1$  et  $p_2$ .

**Partie B**

On appelle  $f_k$  l'application affine de  $P$ , d'endomorphisme associé  $\varphi_k$  et laissant  $I$  invariant.

Soit  $G$  l'ensemble des application  $f_k$  quand  $k$  décrit  $\mathbb{R}^*$ .

1. Démontrer que  $G$  est stable pour la loi  $\circ$  et que  $f_1$  est l'application identique de  $P$ .  
 (On pourra utiliser des résultats de A).

2. Soit 
$$\begin{array}{ccc} \psi: \mathbb{R}^* & \rightarrow & G \\ k & \mapsto & f_k \end{array}$$

- a. Démontrer que  $\psi$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}^*, \times)$  sur  $(G, \circ)$  et préciser la structure de  $(G, \circ)$ .  
 b. Pour tout entier naturel  $n$ , on définit  $f_k^n$  par :

$$\begin{cases} f_k^0 & = & f_1 \\ f_k^n & = & f_k^{n-1} \circ f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $f_k^n = f_{k^n}$ .

**Partie C**

Soit  $H$  la courbe dont une équation dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est :

$$2x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0.$$

1. Démontrer que  $H$  est une hyperbole admettant  $D_1$  et  $D_2$  comme asymptotes. Dessiner  $H$ . Indiquer les points d'intersection avec l'axe des ordonnées.  
 2. a. Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x; y)$ , démontrer qu'il existe un couple de réels  $(\alpha; \beta)$  unique, tel que  $M$  soit le barycentre du système pondéré :  $(A, \alpha) (B, \beta) (I, 1 - \alpha - \beta)$ .  
 b. Démontrer qu'un point  $M$  appartient à  $H$ , si et seulement si le couple  $(\alpha; \beta)$  déterminé à la question précédente satisfait à  $4\alpha\beta + 1 = 0$ .

- c. Démontrer que H est globalement invariante par toute application  $f_k$  de G.

### Partie D

1. Démontrer que toute application  $f_k$  de G, transforme tout point M de coordonnées  $(x; y)$  en le point M' de coordonnées  $(x', y')$  définies par :

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{k} \right) \left( x + \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \left( k - \frac{1}{k} \right) y - \frac{1}{2} \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( k - \frac{1}{k} \right) \left( x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{k} \right) y \end{cases}$$

2. On appellera, par la suite,  $\mathcal{S}$  l'ensemble des couples d'entiers naturels  $(X; Y)$  tels que

$$2X^2 - Y^2 + 2X + 1 = 0.$$

- a. Démontrer qu'un couple  $(X; Y)$  appartient à  $\mathcal{S}$  et satisfait à  $X \leq 3$  si et seulement si  $(X; Y)$  est égal à  $(0; 1)$  ou  $(3; 5)$ .
- b. Soit J et J' les points de coordonnées respectives  $(0; 1)$  et  $(3; 5)$ .  
Démontrer qu'il existe un seul réel non nul  $k$ , tel que  $f_k(J) = J'$ .  
On notera  $g$  l'application  $f_k$  ainsi déterminée. Vérifier que  $g$  transforme tout point M de coordonnées  $(x; y)$  en M' de coordonnées  $(x'; y')$  définies par :

$$\begin{cases} x' &= 3x + 2y + 1 \\ y' &= 4x + 3y + 2 \end{cases}$$

3. On définit une application  $\mathbb{N} \rightarrow P$  en posant :
- $$n \mapsto Q_n$$

$$Q_0 = J, \quad Q_n = g(Q_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On désigne par  $(a_n; b_n)$  les coordonnées de  $Q_n$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $(a_n; b_n)$  appartient à  $\mathcal{S}$ .
- b. Calculer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .