Baccalauréat C Strasbourg juin 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - \left(2 + \sqrt{3}\mathrm{i}\right) z - 2 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 0.$$

2. Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé direct. On considère l'application f de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} + \frac{5}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a. Montrer que f est un antidéplacement. Montrer que $f = s_D \circ t_{\overrightarrow{\omega}}$ où s_D est la symétrie orthogonale par rapport à une droite D et $t_{\overrightarrow{\omega}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{\omega}$, ω appartenant à la direction de D ; déterminer D et ω.

b. Soit C le cercle de centre Ω de coordonnées $\left(0\ ;\ -\sqrt{3}\right)$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et de rayon 1. Déterminer l'image par f de C.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels qui vérifient

$$\left\{\begin{array}{l c l} \delta & = & 60\\ \mu & = & 3\,600 \end{array}\right.$$

ou δ désigne le pgcd de x et y et de y, μ leur ppcm.

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé.
Pour tout m réel, on note C_m l'ensemble des points M, dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$, strictement positives dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, vérifient la relation :

$$\log x \cdot \log y = m.$$

1. Montrer que pour tout m réel, C_m est non vide.

2. Définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$. Montrer que pour tout m de $\mathbb{R}$, C_m est globalement invariant dans cette symétrie.

3. Déterminer C_0.

4. **a.** Montrer que si m est non nul, C_m est la représentation graphique de la fonction $\begin{array}{l c l} f_m : \mathbb{R}_+^{\star} & \to & \mathbb{R}\\ \quad x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\frac{m}{\log x}} \end{array}$ et vérifier que f_m est involutive.

b. Étudier les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.

c. Pour tout réel m non nul, on considère la fonction g_m définie par

$$\begin{array}{l c l l} g_m : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} & \\ \quad x & \longmapsto & f_m(x) & \text{pour } x \text{ élément de } \mathbb{R}_+^{\star} - \{1\}\\ \quad 0 & \longmapsto & 1 & \\ \quad 1 & \longmapsto & 0 & \end{array}.$$

Dresser dans chaque cas (m strictement positif et m strictement négatif) le tableau de variation de g_m

5. Étudier la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{m}{\log x}}-1}{\frac{m}{\log x}}$, quand x tend vers zéro par valeurs positives (m est un réel non nul).

Étudier la limite de $\dfrac{m}{\log x}\mathrm{e}^{\frac{m}{\log x}}$, quand x tend vers 1, par valeurs inférieures pour m strictement positif, par valeurs supérieures pour m strictement négatif.

En déduire que :

$$\text{pour } m>0 \quad \lim_{\substack{x \to 0\\ x>0}} \frac{g_m(x)-g_m(0)}{x} = -\infty$$

$$\text{pour } m<0 \quad \lim_{\substack{x \to 0\\ x>0}} \frac{g_m(x)-g_m(0)}{x} = +\infty$$

$$\text{pour } m>0 \quad \lim_{\substack{x \to 0\\ x>0}} \frac{g_m(x)-g_m(1)}{x-1} = 0$$

$$\text{pour } m<0 \quad \lim_{\substack{x \to 0\\ x>0}} \frac{g_m(x)-g_m(1)}{x-1} = 0$$

Donner des vecteurs directeurs des demi-tangentes à la courbe représentative de g_m aux points d'abscisse 0 et 1.

6. **a.** Représenter graphiquement C_1, C_{-1} et C_0 sur une même figure.

Préciser les intersections de C_1 et de la droite d'équation $y = x$ et donner un vecteur directeur des tangentes en ces points,

b. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x~;~y)$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ vérifient la relation :

$$\log^2|x|\cdot\log^2|y| = 1.$$

Montrer que les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$ sont axes de symétrie de $\mathscr{C}$ et que l'ensemble des points de $\mathscr{C}$, dont les deux coordonnées sont positives est égal à $C_1 \cup C_{-1}$. En déduire la représentation graphique de $\mathscr{C}$.

7. On considère le point mobile M_1 dont les coordonnées à tout instant t supérieur ou égal à 1 sont données dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_1(t) & = & \mathrm{e}^{-t}\\ y_1(t) & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\end{array}\right.$$

a. Donner la trajectoire du mouvement et préciser le sens de parcours.

b. Préciser si le mouvement est uniforme, accéléré ou retardé sur l'intervalle de temps $[1~;~+\infty[$.

c. On considère le point M_2 mobile sur C_1 qui à tout instant t a même abscisse que M_1. Donner les coordonnées $\left(x_2(t)~;~y_2(t)\right)$ de M_2 à tout instant t supérieur ou égal à 1.

Donner la trajectoire de M_2 et préciser le sens de parcours.

On appelle $\overrightarrow{V_1(t)}$ la vitesse de M_1 à l'instant t et $\overrightarrow{V_2(t)}$ la vitesse de M_2 à l'instant t.

Comparer $\left\|\overrightarrow{V_1(t)}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{V_2(t)}\right\|$ à tout instant t.