

⌘ Baccalauréat C Togo juin 1979 ⌘

EXERCICE 1

4 points

On considère dans le plan affine euclidien E , le carré (A, B, C, D) de diagonales $[A, C]$ et $[B, D]$. Soit I le point de E défini par :

$$\vec{AI} = 2\vec{AC}.$$

1. Déterminer trois réels m, n, p , tels que I soit le barycentre des points A, B, D affectés des coefficients respectifs m, n, p .
2. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que :

$$3\vec{MA}^2 = 2\vec{MB}^2 + 2\vec{MD}^2.$$

3. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que :

$$2\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = \vec{MC}^2 + 2\vec{MD}^2$$

EXERCICE 2

4 points

On considère l'ensemble A des entiers naturels n tels que si l'on divise n par p on obtient pour reste $p - 1$, avec $p \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Déterminer le plus petit élément de A .

PROBLÈME

12 points

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

À tout couple de points M de coordonnées $(x; y)$ et M' de coordonnées $(x'; y')$ on associe le point noté $M \star M'$ de coordonnées $(xx' + 4yy'; xy' + yx')$

$$(M; M') \longmapsto M \star M'$$

On définit ainsi une loi de composition interne dans P notée \star .

Partie A (4 points)

1. Montrer que \star est associative.
(P, \star) est-il un groupe commutatif?
2. Déterminer les éléments de P inversible pour \star .
3. Soit H la courbe d'équation $x^2 t - 4y^2 - 1 = 0$.
Représenter H et démontrer que (H, \star) possède une structure de groupe commutatif.

Partie B (4 points)

Soit I un point fixé de P de coordonnées $(a; b)$.

On définit une application f_I du plan P dans lui-même par :

$$f_I(M) = M' = I \star M.$$

1. Montrer que f_I est une application affine,
Comment doit-on choisir I pour que f_I soit bijective?
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f_I ; discuter.

3. Déterminer I pour que f_1 soit une involution.
Préciser la nature et les caractéristiques de chacune des applications obtenues.
4. On désigne par \mathcal{F} l'ensemble des applications f_1 bijectives. Démontrer que (\mathcal{F}, \circ) possède une structure de groupe commutatif.

Partie C (4 points)

Soit φ_1 l'endomorphisme associé à f_1 .

1. Déterminer une base (\vec{u}, \vec{v}) du plan vectoriel associé à P telle que la matrice de φ_1 dans cette base soit de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) de réels définies par u_0, v_0 et les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_n & = & u_{n-1} + 4v_{n-1} \\ v_n & = & u_{n-1} + v_{n-1} \end{cases}$$

Donner en fonction de u_0, v_0 et n les valeurs de u_n et v_n .