Baccalauréat C Toulouse septembre 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit S l'ensemble des entiers relatifs n solutions de l'équation :

$$3n^2 + 2n - 1 \equiv 0 \pmod 5.$$

Déterminer S.
Quel peut être, en base 5, le chiffre des unités de l'écriture d'un entier *naturel* appartenant à S ? Même question en base 10.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan affine euclidien P, on considère un carré (A, B, C, D) tel que $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{DC}}$; on pourra utiliser les points I et J, milieux respectifs des segments [B, C] et [A, D].

1. Déterminer le barycentre G du système (A, 1), (B, -3), (C, -3), (D, 1).
2. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que :

$$\overrightarrow{M\text{A}}^2 - 3\overrightarrow{M\text{A}} \cdot \overrightarrow{M\text{B}} - 3\overrightarrow{M\text{A}} \cdot \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{A}} \cdot \overrightarrow{M\text{D}} = 0.$$

3. Soit f l'application de P dans P qui, au point M, fait correspondre le point M' défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M\text{A}} - 3\overrightarrow{M\text{B}} - 3\overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{D}}.$$

L'application f est-elle une application classique ? Si oui, en préciser les éléments caractéristiques.

PROBLÈME **13 POINTS**

Les parties B et C sont indépendantes

Dans tout le problème, M est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, et on considère les quatre éléments de M :

$$\text{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et $A = a\text{I} + b\text{J}$, où $(a\,;\,b)$ est fixé dans $\mathbb{R}^2$.

Partie A

1. On considère l'application linéaire φ de R^2 dans M définie par :

$$(x\,;\,y) \longmapsto \varphi(x\,;\,y) = x\text{I} + y\text{J}.$$

Montrer que φ est injective, que l'image, $\mathcal{E}$, de φ est un plan vectoriel de base (I ; J).

2. Montrer que $\text{J}^2 = \Omega$.
Pour les couples $(x\,;\,y)$ et $\left(x'\,;\,y'\right)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose $X = x\text{I} + y\text{J}$ et $X' = x'\text{I} + y'\text{J}$.
Montrer que le produit des matrices X et X', noté $X \cdot X'$, est élément de $\mathcal{E}$, et calculer ses coordonnées dans la base (I ; J) en fonction de x, y, x' et y'. Est-ce que $X \cdot X' = X' \cdot X$?
Quels sont tous les X de $\mathcal{E}$ tels que $X^2 = \Omega$?

3. On considère l'application linéaire ψ de $\mathscr{E}$ dans lui-même définie par :

$$X \longmapsto \psi(X) = A.X$$

Trouver le noyau de ψ (on distinguera les trois cas : $a \neq 0$, $a = 0$ et $b \neq 0$, $a = b = 0$).

Montrer que I appartient à l'image de ψ si et seulement si $a \neq 0$.

4. Soit un entier $n > 0$. Montrer que $A^n = a^n\mathrm{I} + na^{n-1}b\mathrm{J}$. (on pourra raisonner par récurrence sur n).

Donner une expression simple de chacune des sommes suivantes :

$$\begin{array}{lcl} P(a) & = & 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}, \text{ pour } n > 0 \text{ et } a \neq 0 \\ P'(a) & = & 1 + 2a + 3a^2 + +(n-1)a^{n-2} \text{ pour } n > 1 \text{ et } a \neq 0. \end{array}$$

(on distinguera les cas : $a \neq 1$ et $a = 1$.)

En déduire $\left(\alpha_n\ ;\ \beta_n\right)$ élément de R^2, défini par :

$$\alpha_n\mathrm{I} + \beta_n\mathrm{J} = \mathrm{I} + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}.$$

Si on suppose $|a| < 1$, montrer que les limites suivantes :

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{n \to +\infty} \beta_n$$

existent, et les calculer. (On rappelle que, si $|a| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n.a^n = 0$).

Montrer que $\alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$ est la matrice inverse de la matrice $\mathrm{I} - A$, quand $|a| < 1$.

Partie B

On suppose, dans cette partie, que $a > 0$ et que $\mathscr{E}$ est muni d'une structure euclidienne telle que (I ; J) soit une base orthonormée.

On définit la fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{E}$:

$$t \longmapsto \mathrm{E}(t) = a^t\mathrm{I} + ta^{t-1}b\mathrm{J}$$

1. Montrer que pour tout $(t\ ;\ s)$ appartenant à $\mathbb{R}^2$, la matrice $\mathrm{E}(t+s)$ est le produit $\mathrm{E}(t) \cdot \mathrm{E}(s)$ des matrices $\mathrm{E}(t)$ et $\mathrm{E}(s)$.

Que sont E(0) et E(1) ?

Retrouver l'expression de A^n du A 4. pour n entier positif.

Montrer que $\mathrm{E}(-t)$ est l'inverse de $\mathrm{E}(t)$.

2. Calculer $\mathrm{E}'(t)$, E' étant la fonction vectorielle dérivée de E.

Montrer qu'il existe B appartenant à $\mathscr{E}$ tel que $\mathrm{E}'(t) = B \cdot \mathrm{E}(t)$ pour tout t ; on exprimera B en fonction de a et b.

3. On suppose $a = b = \mathrm{e}$ où e est la base des logarithmes népériens.

Montrer que l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{R}^2$ tels qu'il existe un réel t satisfaisant à $\mathrm{E} = x\mathrm{I} + y\mathrm{J}$ est l'ensemble $\left\{(x\ ;\ y)\ ; x > 0,\ y = x\mathrm{Log}\, x\right\}$.

Partie C

1. On considère $A_1 = a_1\mathrm{I} + b_1\mathrm{J}$ et $A_2 = a_2\mathrm{I} + b_2\mathrm{J}$, éléments de $\mathscr{E}$.

Montrer que $A_1 \cdot A_2 = \Omega$ si et seulement si : ou bien $A_1 = \Omega$, ou bien $A_2 = \Omega$, ou bien $a_1 = a_2 = 0$.

Trouver tous les $X = x\mathrm{I} + y\mathrm{J}$ de $\mathscr{E}$ tels que $(X - A_1) \cdot (X - A_2) = \Omega$ (on distinguera les cas $a_1 \neq a_2$ et $a_1 = a_2$).

2. Soient a_j et b_j $(j \in \mathbb{N}^{\star})$ deux suites de réels. On pose

$$A_j = a_j\mathrm{I} + b_j\mathrm{J}$$

a. On considère l'application linéaire f définie de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(X) = x \quad \text{avec } X = x\mathrm{I} + y\mathrm{J}.$$

Montrer que $f\left(X \cdot X'\right) = f(X)f\left(X'\right)$ pour tous X et X' de $\mathscr{E}$.
En déduire par récurrence sur n que $f\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots A_n\right) = a_1 a_2 \cdots a_n$.

b. On suppose que $\forall j,\ A_j \neq \Omega$. Montrer par récurrence sur n que si $A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots A_n = \Omega$, il existe i et j éléments distincts de $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ tels que $a_i = a_j = 0$; (on utilisera le C 1. a. et le C 2. a.)
Réciproquement, montrer que s'il existe i et j, avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $a_i = a_j = 0$, alors $A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots A_n = \Omega$.