# Baccalauréat C groupe 4 [1] juin 1988

**EXERCICE 1** **4 POINTS**

$\theta$ étant un nombre réel de l'intervalle $]0~;~2\pi[$, on considère les deux nombres complexes :

$$z = \text{e}^{\text{i}\theta},\ \text{(ou encore } z = \cos\theta + \text{i}\sin\theta\text{) et } Z = \frac{1+z}{1-z}$$

et on note $|Z|$ le module de $Z$.

1. Montrer que $Z = \text{i}\text{cotan}\dfrac{\theta}{2}$ où $\text{cotan}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$.
2. Pour quelles valeurs de $\theta$ l'argument de $Z$ est-il défini ? À quoi est-il alors égal ? (On distinguera deux cas suivant les valeurs de $\theta$.)
3. A quoi est égal $|Z|$ ?
4. On pose $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |Z|\,\text{d}\theta$. Justifier l'existence de cette intégrale et la calculer (on pourra mettre $|Z|$ sous la forme $k\dfrac{u'(\theta)}{u(\theta)}$ où $k$ est un nombre réel et $u$ une fonction de $\theta$.

**EXERCICE 2** **4 POINTS**

On considère dans le plan orienté deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de même rayon $r$, de centres respectifs $O_1$ et $O_2$ et tangents extérieurement en A.

On appelle $f$ la transformation obtenue en effectuant d'abord la translation T de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$ puis la rotation R de centre $O_2$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{3}$ (modulo $2\pi$), (on donne donc $f = \text{R} \circ \text{T}$).

1. Dessiner la figure $\mathcal{F}$ formée par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en prenant $r = 4$ cm.
2. Soit $M_1$ un point quelconque de $\mathcal{C}_1$.
   Montrer que $M_2 = f(M_1)$ est un point de $\mathcal{C}_2$.
   Faire apparaître $M_1$ et $M_2$ sur la figure $\mathcal{F}$.
3. Déterminer l'image de $O_1$ par $f$.
4. On pose $A' = f(A)$ et on appelle B le symétrique de A par rapport à $O_2$,
   Que peut-on dire du triangle $O_2A'B$ ? Placer le point $A'$ sur la figure $\mathcal{F}$.
5. Montrer que $f$ est une rotation dont on précisera l'angle $\alpha$ et le centre I. Placer I sur la figure $\mathcal{F}$.
   Que peut-on dire du triangle $O_1O_2I$ ? Exprimer AI en fonction de $r$.

**PROBLÈME** **12 POINTS**

*Sans être totalement indépendantes, les trois parties du problème peuvent abordées dans un ordre quelconque*

**I.** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Aix-Marseille - Nice - Corse - Montpellier - Toulouse

1. **a.** Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   **b.** Préciser les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$ (pour déterminer l'une ces asymptotes, on étudiera $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

   **c.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** Soit $m$ un nombre réel et soit $\Delta$ la droite d'équation $y = m$. Discuter, suivant les valeurs de $m$, le nombre de points d'intersection de $\Delta$ et de $\mathscr{C}$.

   **b.** Pour tout $m > \sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de $\Delta$ et de $\mathscr{C}$.
   Soit I le milieu du segment [AB].
   Montrer que, quand $m$ décrit l'intervalle $]\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$.

3. On construit une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
   $A_0$ est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2 ;
   pour tout $n \geqslant 0$, à partir du point $A_n$ de $\mathscr{C}$, on détermine $B_n$, deuxième point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la parallèle à $x'x$ passant par $A_n$, puis $I_n$, milieu du segment $[A_nB_n]$ ;
   $A_{n+1}$ est alors le point de $\mathscr{C}$ de même abscisse que $I_n$. [On admet, et . n'est donc pas demandé de le démontrer, que le procédé décrit , ci-dessus définit bien la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Placer sur la figure les points $A_0,\ B_0,\ I_0,\ A_1,\ B_1,\ I_1$.
   On appelle $x_n$ l'abscisse de $A_n$.
   Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{2x_n}\right) \quad ; x_0 = 2$$

   (On utilisera la question 2. b.)

**II.** *Cette deuxième partie est consacrée à l'étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la fin de la partie précédente.*

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $x_n$ est défini et strictement positif.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $x_{n+1} - \sqrt{\frac{3}{2}} = \dfrac{\left(x_n - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{2x_n}$.

3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $x_n \geqslant \sqrt{\frac{3}{2}}$ et ensuite que :

$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant \left(x_n - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$$

4. Montrer, à l'aide des questions précédentes, que pour tout $n \geqslant 0$ :

$$0 \leqslant x_n - \sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant \left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{(2n)}.$$

   (pour démontrer la deuxième inégalité de cette double inégalité, on procèdera par récurrence et l'on pourra poser, pour simplifier, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = x_n - \sqrt{\frac{3}{2}}$.)

5. En utilisant l'égalité $\left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{(2^n)} = \mathrm{e}^{(2^n)\ln\left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}$, montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

**III.** Calcul sur machine

En utilisant toute la précision de la calculatrice, présenter dans un tableau les valeurs décimales approchées des six premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des six premiers termes de la suite $(x_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$/
[La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie à la fin de la partie 1 du problème et on a posé $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.]