Baccalauréat C groupe 1 [1] 1988

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit dans le plan $\mathscr{P}$ orienté un triangle ABC rectangle en A tel que AC = 2AB et $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Soit $\mathscr{C}$(B) le cercle de centre B et de rayon AB et $\mathscr{C}$(C) le cercle de centre C et de rayon AC.
Ces deux cercles passent par A.
On appelle E leur second point d'intersection.

1. Soit S une similitude directe transformant $\mathscr{C}$(B) en $\mathscr{C}$(C). Quelle est la valeur du rapport de la similitude S ?
   On désigne par I le centre de S. Quelle est la valeur du rapport $\dfrac{\text{IC}}{\text{IB}}$?
   Quel est l'ensemble (Γ) des centres I des similitudes directes transformant $\mathscr{C}$(B) en $\mathscr{C}$(C) ?
2. Soit S_A la similitude directe de centre A transformant B en C.
   Soit F le point de $\mathscr{C}$(C) diamétralement opposé à à E.
   Démontrer que l'image de E par S_A est le point F.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
On considère l'équation (E) d'inconnue complexe z :

$$\text{(E)}\qquad z^2\cos^2\theta - 4z\cos\theta + 5 - \cos^2\theta = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
   Préciser pour quelle valeur de θ l'équation admet une racine double.
   Donner la valeur de cette racine double.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormal.
   On appelle M' et M'' les points de $\mathscr{P}$ dont les affixes respectives sont les nombres z' et z'' solutions de l'équation (E).
   Montrer que lorsque θ varie, M' et M'' se déplacent sur une hyperbole (H).
   Déterminer le centre, les sommets et les asymptotes de (H). Tracer (H).
3. Montrer que, lorsque θ décrit l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'ensemble $\mathscr{E}$ décrit par les points M' et M'' est une branche de (H).

PROBLÈME **10 POINTS**

Le problème propose l'étude d'une famille de fonctions (partie A), d'une suite (partie B) et d'une courbe (partie C) définies à partir de ces fonctions.

A. Dans cette partie, on met en place des résultats qui seront utilisés dans les parties B et C.

On désigne par ln le logarithme népérien et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.
On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

1. Amiens - Paris - Créteil - Versailles - Lille - Rouen

1. Déterminer les limites de f_n aux bornes de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Étudier les variations de f_n.
2. Construire la courbe représentative $(\mathscr{C}_1)$ de la fonction f_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormal. Préciser ses asymptotes.
3. Pour tout réel X supérieur ou égal à 1 on pose :

$$I_n(X) = \int_1^X f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (La justification de l'existence de I_n propriété connue, n'est pas demandée.)
   a. Calculer $I_1(X)$.
   b. En utilisant une intégration par parties, calculer $I_n(X)$ en fonction de n et de X, pour n supérieur ou égal à 2.
   Déduire de ce résultat la valeur de l'intégrale :

$$\int_2^X f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

   c. Soit n un entier naturel non nul fixé.
   Calculer la limite de $I_n(X)$ quand X tend vers $+\infty$. (On distinguera deux cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$).
   Calculer la limite quand X tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_2^X f_2(t)\,\mathrm{d}t$.

B. Étude d'une suite définie à partir de f_2.

On considère la fonction f_2 définie en A par :

$$f_2(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel $k,\ k \geqslant 2$:

$$f_2(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_2(k).$$

   (On peut utiliser le sens de variation de f_2)
2. On considère la suite S définie par son terme général

$$S_p = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \cdots + \frac{\ln p}{p^2}$$

   où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   a. Montrer que la suite S est croissante.
   b. En utilisant B 1., montrer que :

$$S_p - \frac{\ln 2}{2^2} \leqslant \int_2^p f_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_p - \frac{\ln p}{p^2}$$

   et en déduire un encadrement de S_p.
   c. En utilisant la valeur de $\displaystyle\int_2^p f_2(t)\,\mathrm{d}t$ trouvée en A, montrer que la suite S est majorée.
   d. Montrer que la suite S est convergente et que sa limite L vérifie :

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} \leqslant L \leqslant \frac{1}{2} + 3\frac{\ln 2}{4}$$

C. Étude d'une courbe définie paramétriquement à partir des fonctions f_n.

On considère la courbe (Γ_1) définie paramétriquement par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & f_1(t)\\ y & = & f_2(t)\end{array}\right.$$

où t est un réel appartenant à l'intervalle $[1~;~10]$.

1. Représenter dans un même tableau les variations des deux fonctions qui à t associent respectivement $x(t)$ et $y(t)$.
2. Représenter la courbe (Γ_1) dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.(unité : 20 cm).

   Préciser les points de (Γ_1) en lesquels les tangentes sont parallèles à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.