

❧ Baccalauréat C Métropole septembre 1988 ❧

EXERCICE 1

4 POINTS

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

θ désigne un nombre réel de l'intervalle $]-\pi; +\pi[$.

Pour tout θ on définit le nombre complexe

$$z(\theta) = \frac{1}{2} (1 + e^{i\theta})^2.$$

1. Calculer $(1 + e^{i\theta}) e^{-i\frac{\theta}{2}}$, en déduire que le nombre complexe $(1 + e^{i\theta})$ a pour argument $\frac{\theta}{2}$.

Calculer le module et l'argument de $z(\theta)$.

Représenter dans le plan complexe $z(\theta)$.

2. Soit M le point d'affixe $z(\theta)$ et A le point d'affixe 1. On projette orthogonalement A en P sur la droite (OM).

Quel est l'ensemble des points P quand θ varie dans $]-\pi; +\pi[$?

3. Calculer la distance PM. On séparera les cas

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \theta \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[.$$

4. Donner une construction géométrique de l'ensemble des points M (construction point par point).

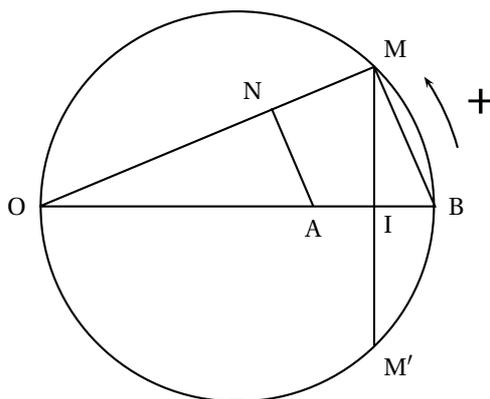
EXERCICE 2

4 POINTS

On considère dans le plan (P) un cercle de diamètre [OB].

Soit A un point du segment [OB], distinct de O et de B, I le milieu de [AB].

La médiatrice du segment [AB] coupe le cercle en M et M' tels qu'une mesure de l'angle (\vec{MO}, \vec{MB}) soit $+\frac{\pi}{2}$. Soit N la projection orthogonale de A sur (OM).



1. Donner la nature du quadrilatère AMBM'. En déduire que la droite (AM') est orthogonale à (OM) et que N, A et M' sont alignés.
2. On appelle S la similitude directe de centre N, telle que $S(M) = A$. Préciser l'angle de cette similitude. Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA) . En déduire l'image par S du point M'.

3. Montrer que l'image par S de I est le point I' , milieu de $[OA]$. En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$.

PROBLÈME**12 POINTS****Partie A**

1. On considère la fonction polynôme P définie pour tout x réel par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

- a. Étudier les variations de P .
 b. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une racine réelle et une seule α , et que α appartient à l'intervalle $]1,6; 1,7[$.
2. Soit D l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1 .
 On considère la fonction numérique f définie sur D par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on prendra comme unité 4 cm).

- a. Étudier les variations de f (on utilisera pour cela les résultats du 1).
 b. Écrire une équation de la droite (Δ) tangente à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0. Étudier la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à la droite (Δ) dans l'intervalle $] -1; +1[$.
 c. Montrer que la courbe (\mathcal{C}) est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.
 Tracer la courbe (\mathcal{C}) , la droite (Δ) et la tangente à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 1.
3. a. Déterminer trois réels a, b, c , tels que pour tout x dans l'ensemble de définition de f on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

- b. x étant un nombre réel positif, justifier l'existence de l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

et la calculer.

- c. Calculer $F(1)$ et interpréter ce nombre à l'aide d'une aire.

Partie B

On désigne par \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels.

On considère la suite numérique $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel p de \mathbb{N} , par :

$$u_p = \frac{(-1)^p}{(3p+1)(3p+2)},$$

puis la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_p + \dots + u_n.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel p , on a

$$\int_0^1 t^{3p}(1-t) dt = \frac{1}{(3p+1)(3p+2)}.$$

2. a. Montrer que

$$S_n = \int_0^1 (1-t) \frac{1 - (-t^3)^{n+1}}{1+t^3} dt.$$

b. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^3} dt$$

Montrer que

$$I - S_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^3} [t^{3n}(1-t)] dt.$$

Donner sur $[0; 1]$ un majorant de $\frac{t^3}{1+t^3}$ et en déduire, en utilisant le B 1., que :

$$|I - S_n| \leq \frac{1}{9n^2}.$$

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est $\frac{2}{3} \ln 2$.