

∞ Baccalauréat C groupe 1¹ juin 1988 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère le cercle C de centre O et de rayon a et le cercle C' de centre O et de rayon b , où a et b sont des nombres réels donnés tels que $0 < b < a$.

On note D et D' les droites passant par O et de vecteurs directeurs respectifs \vec{i} et \vec{j} . Pour tout nombre réel θ , on note P le point du cercle C tel que θ soit une mesure (en radians) de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OP})$ et P' le point d'intersection de C' avec la demi-droite Δ d'origine O passant par P .

Soit enfin M le point d'intersection de la droite passant par P parallèle à D' et de la droite passant par P' parallèle à D .

1. Calculer les coordonnées x et y de M en fonction de θ .
En déduire la nature de l'ensemble E décrit par M lorsque θ parcourt \mathbb{R} .
2.
 - a. Déterminer un vecteur directeur de la tangente T à la courbe E au point M .
 - b. Soit N le point d'intersection de la droite passant par P parallèle à D et de la droite passant par P' parallèle à D' .
Prouver que T est orthogonale à la droite (ON) .
En déduire une construction géométrique de T .
3. On prend $a = 6$ et $b = 3$. Construire sur une même figure les cercles C et C' , les droites D et D' et l'ensemble E .
On placera sur cette figure les points P, P', M et N correspondant à $\theta = \frac{\pi}{4}$, et la tangente T en M à E (on prendra 1 cm pour unité graphique).

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans un plan P de l'espace, on considère un cercle C de diamètre $[AB]$. Soit Δ la droite passant par A orthogonale à P et S un point de Δ distinct de A .

On note I le projeté orthogonal de A sur la droite (BS) .

Pour tout point M du cercle C on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS) .

1. Placer les données précédentes sur une figure, Δ étant placée verticalement.
2. Prouver que H appartient à la sphère Σ de diamètre $[AS]$.
3. Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B .
Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS) .
En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS) .
4. Montrer que H appartient au plan Π passant par I orthogonal à la droite (BS) .
5.
 - a. Déterminer l'intersection Γ de la sphère Σ et du plan Π .
 - b. Prouver que l'ensemble décrit par H lorsque M parcourt C est égal à Γ . À cet effet, étant donné un point N' de Γ distinct de A , on pourra montrer que le plan $(AN'S)$ coupe le cercle C en A et en un autre point M .

PROBLÈME

11 POINTS

A L'objet de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

1. Paris - Créteil - Versailles

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) unité graphique : 2 cm.

1. *Encadrement de $\ln(1+x)$.*

a. Prouver que, pour tout nombre réel $t \geq 0$,

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1.$$

b. En intégrant ces inégalités, établir que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x. \quad (1)$$

2. *Étude d'une fonction auxiliaire*

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$$

a. Montrer que g est dérivable et calculer g' .

b. Prouver que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$$

(pour majorer $g'(x)$, on minorera $(1+x)(2+x)^2$).

c. En déduire que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$0 \leq g(x) \leq \frac{x^2}{12} \quad (2)$$

3. *Variations de la fonction f*

a. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b. Établir que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$g(x) \leq \ln(1+x) - \frac{1}{1+x}$$

Grâce à (2), en déduire le sens de variation de f .

4. *Étude de f aux bornes de l'intervalle de définition*

a. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Prouver que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

À cet effet, on notera que (2) fournit un encadrement de $\ln(1+x)$ et on en déduira un encadrement de $x - \ln(1+x)$.

c. En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

Donner une équation de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 et, grâce à (1), préciser la position de \mathcal{C} par rapport à T .

5. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe \mathcal{C} et la droite T .

B L'objet de cette partie est d'étudier la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels définie par les relations :

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \quad \text{si } n \geq 0 \text{ et } u_0 = c,$$

où c est un nombre réel strictement positif donné.

1. Convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

- a. Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n > 0$ et que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
- b. Montrer que cette suite converge.
Établir que sa limite ℓ est nulle (on pourra utiliser les variations de f).
- c. On prend $c = 1$. À l'aide de la calculatrice, obtenir des valeurs approchées de u_{10} , u_{50} et u_{100} .
Que peut-on conjecturer pour la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Encadrement de (u_n)

À partir de cette question, on prend $c = 1$. Pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$v_n = \frac{1}{u_n}.$$

- a. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n . En déduire, à l'aide de (3), la limite de $v_{n+1} - v_n$.
- b. Prouver que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0; 1]$,

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}.$$

À cet effet, on pourra utiliser (2) en établissant d'abord que :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{(2+x)g(x)}{2x \ln(1+x)} \leq \frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x).$$

- c. En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2} \quad (4)$$

puis que :

$$\frac{1}{4} \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2} \quad (5)$$

- d. En effectuant la somme des inégalités (5), encadrer $v_n - v_0$.
En déduire que pour tout entier $n \geq 0$

$$\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4}{n+4} \quad (6)$$

- e. Déterminer enfin la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$. À cet effet, on établira la majoration :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+3} \leq \ln(n+3)$$

et on encadrera $v_n - v_0$ grâce à (4).