

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud décembre 1990 ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan P orienté, on considère un carré ABCD tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

On désigne par I et K les milieux respectifs des segments [AC] et [CD].

Représenter ces points sur une figure. (On choisira $AB = AD = 4$ cm.)

On se propose d'étudier la similitude directe S telle que :

$$S(A) = I \quad \text{et} \quad S(C) = K.$$

1. Recherche géométrique des éléments de S .
 - a. Donner le rapport et l'angle de S .
 - b. Démontrer que le centre Ω de S est le point d'intersection autre que I des cercles de diamètres [AD] et [IC]. Placer ces cercles et Ω sur la figure.
2. Recherche du centre de S à l'aide des nombres complexes.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

 - a. Donner les affixes des points A, C, I et K.
 - b. Donner l'écriture complexe de S .
 - c. En déduire les coordonnées de Ω .

EXERCICE 2

4 points

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites distinctes de l'espace.

On note R_1 et R_2 les demi-tours d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 .

Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur Δ_1 et Δ_2 pour que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

1. On suppose que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point noté O et sont orthogonales. On note Δ la droite orthogonale en O au plan P contenant Δ_1 et Δ_2 .

On note P_1 et P_2 les plans passant par Δ et contenant respectivement Δ_1 et Δ_2 .

 - a. Faire une figure.
 - b. On note S_P , S_{P_1} et S_{P_2} les réflexions par rapport aux plans P , P_1 et P_2 . Déterminer $S_P \circ S_{P_1}$ et $S_{P_2} \circ S_P$.
 - c. En déduire que $R_2 \circ R_1$ est le demi-tour R_Δ d'axe Δ .
 - d. Prouver que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.
2. Réciproquement, on suppose que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

Soient A un point de Δ_1 qui n'appartient pas à Δ_2 et B l'image de A par R_2 .

 - a. Montrer que la droite (AB) et la droite Δ_2 sont sécantes et orthogonales.
 - b. En utilisant la relation $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$, prouver que $B = R_1(A)$.
 - c. En déduire que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes et orthogonales.

PROBLÈME

12 points

Le problème propose :

Dans la partie A : l'étude d'une fonction numérique f et de l'équation $f(x) = x$.

Dans les parties B et C : la construction de deux suites convergeant avec des rapidités différentes vers la solution de l'équation précédente.

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (l'unité graphique sera précisée lorsqu'une représentation sera demandée).

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

1. Déterminer le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$ et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Tracer (figure numéro 1) la courbe représentative \mathcal{C} de f et la droite Δ d'équation $y = x$. (Unité graphique : 1 cm).
3. On s'intéresse à l'intersection de \mathcal{C} et de Δ .
On pose, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x$.
 - a. Déterminer le sens de variation de φ sur $]0; +\infty[$ et les limites de φ en 0 et en $+\infty$.
 - b. En déduire que la droite Δ coupe la courbe \mathcal{C} en un point et un seul qu'on notera I.
On désigne par α l'abscisse de ce point. Vérifier l'encadrement :

$$0,7 < \alpha < 0,9.$$

Partie B

On désigne par J l'intervalle $[0,7; 0,9]$.

1. Démontrer que si $x \in J$ alors $f(x) \in J$.
2.
 - a. Prouver que, pour tout x de J, $|f'(x)| \leq 0,85$.
 - b. En déduire que, pour tout x de J, $|f(x) - f(\alpha)| \leq 0,85|x - \alpha|$.
3. On définit la suite (u_n) de points de J par

$$u_0 = 0,9 \quad \text{et, pour tout } n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n).$$

- a. Tracer (figure n° 2) la partie de la courbe \mathcal{C} d'équation $y = f(x)$ pour laquelle $x \in [0,5; 1,5]$ et la droite Δ d'équation $y = x$. (Unité graphique : 10 cm.)
- b. En s'aidant du graphique et sans chercher à les calculer, représenter sur l'axe $(O; \vec{i})$ les termes u_0, u_1, u_2, u_3 .
4.
 - a. Prouver que, pour tout entier naturel n ,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,85|u_n - \alpha|, \quad \text{puis que}$$

$$|u_n - \alpha| \leq 0,2 \times (0,85)^n.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

Donner des valeurs approchées avec six décimales des termes u_n pour n entier variant de 1 à 10.

- b. Déterminer un entier naturel n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-6}$.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = xe^x - x - 1.$$

1. Démontrer que, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, les deux équations d'inconnue x

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad h(x) = 0$$

ont le même ensemble de solutions.

On a donc $h(\alpha) = 0$.

2. On note \mathcal{H} la courbe de h , dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- Calculer $h'(x)$ et prouver que $h'(x) > 0$ pour $x \in]0; +\infty[$.
 - Tracer (figure n° 3) la partie de la courbe \mathcal{H} pour laquelle $x \in [0; 1]$.
(Unité graphique : 10 cm.)
Placer la tangente à \mathcal{H} au point d'abscisse 0,9.
3. Soit a un nombre réel de l'intervalle $]a; 0,9]$. Soit T la tangente à la courbe \mathcal{H} au point M d'abscisse a .
On désigne par b l'abscisse du point d'intersection de T et de l'axe $(O; \vec{i})$.
- Écrire une équation cartésienne de T .
 - Exprimer b en fonction de a .
4. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 e^x + 1}{e^x(x+1) - 1}.$$

On rappelle qu'on a montré en C 2. a. que $e^x(x+1) - 1 > 0$ pour $x > 0$.

(On vérifiera que $b = g(a)$, où a et b ont été définis à la question précédente.)

On définit la suite (v_n) de nombres réels en posant :

$$v_0 = 0,9 \quad \text{et, pour tout } n \geq 0, \quad v_{n+1} = g(v_n).$$

On admet que la suite (v_n) converge vers le nombre réel α .

- En s'aidant de la figure n° 3, et sans chercher à les calculer, représenter sur l'axe $(O; \vec{i})$ les termes v_0, v_1 et v_2 .
- Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4 . On donnera pour chaque résultat une valeur décimale approchée par excès comportant six décimales.
On note $\overline{v_4}$ celle de v_4 .
- Déduire des signes des nombres $h(\overline{v_4})$ et $h(\overline{v_4} - 10^{-6})$ un encadrement de α à 10^{-6} près.
Comparer avec les résultats obtenus dans la partie B.