Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique du Sud ∾ novembre 1993

EXERCICE 1 **5 points**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

On désigne par :

r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

1. Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre B. Préciser alors la position du point E.
2. On désigne par s la similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ telle que : $s(A) = B$.
   Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}\right)$.
   En déduire que : $s(E) = D$.
3. Soit Q le centre de la similitude s.
   Montrer que Q appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE.
   Construire Q.
4. **a.** Démontrer que s transforme la droite (AC) en (CB).
   b. Démontrer que l'image par s du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD]. En déduire que l'image de C par la similitude s est le point I, milieu du segment [DE].

EXERCICE 2 **4 points**

Une ume contient $n + 8$ boules : huit boules blanches et n boules noires (n étant un entier au moins égal à deux).
Tous les tirages effectués sont supposés équiprobables.
On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. Pour chaque boule blanche tirée il gagne un franc, mais pour chaque noire il perd deux francs.
Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes*

1. Dans cette question, un joueur effectue deux tirages : il tire une première boule de l'ume, il la remet dans l'urne puis il effectue un deuxième tirage.
   a. Montrer qu'il peut, soit gagner deux francs, soit perdre un franc, soit perdre quatre francs.
   b. Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant à chacun des cas.

c. Calculer, en fonction de n, l'espérance mathématique de gain du joueur. Y a-t-il une valeur de n pour laquelle cette espérance est nulle ? Si oui, la donner.

2. Dans cette question, n est fixé égal à 6 (il y a donc 6 boules noires et 8 blanches dans l'urne). Le joueur tire trois boules simultanément.

a. Montrer qu'il peut, soit gagner trois francs, soit perdre six francs, soit perdre trois francs, soit ne rien gagner ni ne rien perdre.

b. Calculer la probabilité correspondant à chaque cas.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Pour l'étude de la limite en -1, on remarquera que

$$f(x) = \frac{2x-(1+x)\ln(1+x)}{1+x}$$

2. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ une solution unique notée α. Vérifier qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-1} près est $3,9$.

4. Préciser, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & 0 \\ g(t) & = & \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} \quad \text{si } t>0. \end{array}\right.$$

1. Démontrer que g est continue sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier la dérivabilité de g en 0.

2. Montrer que pour tout réel t strictement positif, on a :

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}f(t).$$

3. **a.** Calculer la limite de g en $+\infty$. On remarquera que pour $t>0$:

$$\ln(1+t) = \ln t + \ln\left(1+\frac{1}{t}\right).$$

b. Dresser le tableau des variations de g.

4. Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unités : 1 cm sur l'axe $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$ et 10 cm sur l'axe $\left(\text{O},\ \vec{\jmath}\right)$.
Construire la courbe (Γ) représentative de g.

Partie C

Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

1. **a.** Démontrer que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g_1(x) = \sqrt{x}\ln(1+x)$$

est dérivable en 0.

b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que φ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$.

2. En déduire que : $\mathcal{A} = 2\ln 2 - \displaystyle\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

et k la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0\,;\,+\dfrac{\Pi}{2}\right[$ par $k(\theta) = \tan^2\theta$.

1. Calculer $(h \circ k)(0)$.
2. Prouver que, pour tout θ appartenant à I, $(h \circ k)'(0) = 4\tan^2\theta$.
3. En écrivant $\tan^2\theta$ sous la forme $(\tan^2\theta + 1) - 1$, déterminer une primitive de $(h \circ k)'$ puis donner l'expression de $(h \circ k)$.
4. Calculer $h(\mathrm{I})$.

Déduire des résultats précédents la valeur exacte de $\mathcal{A}$.