

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Antilles-Guyane juin 1993 ∞

EXERCICE 1

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , l'unité est le centimètre.

Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M le milieu de [BC], N celui de [CA] et P celui de [AB].

Les affixes respectives des points M, N et P sont notées  $m, n$  et  $p$ .

1. Dans cette question,  $m$  vaut  $-1 - 3i$  et  $n$  vaut 2.  
Construire les triangles MNP et ABC.
2. On considère la transformation  $f$  du plan dans lui-même qui à chaque point  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = x' + iy'$  telle que :

$$z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(-z + m + n + p).$$

Quelle est la nature de  $f$ ? Donner ses éléments caractéristiques.

3.  $a, b$  et  $c$  désignent les affixes respectives des points A, B et C.
  - a. Montrer que  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$ . En déduire que  $a = n + p - m$ .
  - b. Exprimer, d'une manière analogue,  $b$  et  $c$  en fonction de  $m, n$  et  $p$ .
4. On pose  $f(A) = A', f(B) = B'$  et  $f(C) = C'$ .  
On désigne par  $a', b'$  et  $c'$  les affixes respectives des points  $A', B'$  et  $C'$ .
  - a. Démontrer que :
$$a' = (1 + i)m,$$
$$b' = (1 + i)n,$$
$$c' = (1 + i)p.$$
  - b. En déduire que  $\overrightarrow{MA'}$  et  $\overrightarrow{OM}$  sont orthogonaux et que  $A'$  appartient à la droite (BC).
  - c. Montrer de même que  $B'$  appartient à la droite (AC) et que  $C'$  appartient à la droite (AB).
5. Montrer que les triangles MNP et  $A'B'C'$  sont directement semblables, (On précisera le centre de la similitude directe transformant le triangle MNP en le triangle  $A'B'C'$ .)
6. Compléter par les points  $A', B'$  et  $C'$  la figure réalisée au 1.

EXERCICE 2

4 points

Un tournoi oppose deux équipes A et B qui jouent trois parties successives d'un même jeu. Le vainqueur du tournoi est l'équipe qui a gagné le plus de parties.

Chaque partie est notée respectivement A, B ou N suivant que l'équipe A gagne, B gagne ou la partie est nulle.

À chaque partie, l'équipe A a une probabilité de 0,5 de gagner, l'équipe B a une probabilité de 0,4 de gagner et la probabilité pour que la partie soit nulle vaut 0,1.

1. Dresser la liste des tournois sans vainqueur : justifier qu'ils sont au nombre de 7.  
Montrer que la probabilité pour que le tournoi soit sans vainqueur est égale à  $0,121$ .
2.
  - a. Calculer la probabilité pour que l'équipe A gagne exactement une partie du tournoi et remporte le tournoi.
  - b. Montrer que la probabilité pour que l'équipe A soit vainqueur du tournoi est  $0,515$ .
3. Sachant que l'équipe B est vainqueur du tournoi, calculer la probabilité que l'équipe B ait gagné exactement deux parties.

**PROBLÈME****11 points****Partie A**

1. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels l'équation différentielle :

$$(1) \quad y'' + 2y' + 2y = 0.$$

2. On considère sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ , l'équation différentielle :

$$(2) \quad y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \left( -x + \frac{1}{2} \right).$$

- a. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = e^{-x}(ax + b)$$

soit une solution de l'équation (2).

- b.  $h$  désignant une solution quelconque de l'équation (1), montrer que la fonction  $f$  telle que :  $f(x) = g(x) + h(x)$  est solution de l'équation (2).
- c. Déterminer parmi les fonctions  $f$  définies au 2. b. celle qui vérifie :  
 $f(0) = 1$  et  $f'(0) = -\frac{3}{2}$ .

**Partie B**

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur l'intervalle  $[-1 ; 5]$  par :

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x - 2x + 1).$$

1. Montrer que,  $\varphi'$  désignant la fonction dérivée de  $\varphi$ , on a :

$$\varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{2}(2x - 3 - 2\sin x).$$

2. On pose, pour tout  $x$  appartenant à  $[-1 ; 5]$ ,  $y(x) = 2x - 3 - 2\sin x$ .
  - a. Montrer que  $y$  est croissante sur  $[-1 ; 5]$ .
  - b. Montrer qu'il existe un unique réel  $a$  compris entre 2,2 et 2,3 tel que :  
 $y(a) = 0$ .
  - c. Dresser le tableau de variation de  $\varphi$ .
3. Construire la courbe représentative de la fonction  $\varphi$  en prenant  $\varphi(2,3)$  comme valeur approchée de  $\varphi(a)$ .

**Partie C**

On rappelle que  $\varphi$  vérifie l'équation (2) de la partie A :

$$\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + 2\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{2} \left( -x + \frac{1}{2} \right).$$

1. Calculer, en intégrant par parties :

$$\int_0^1 e^{-x} \left( -x + \frac{1}{2} \right) dx.$$

2. Sachant que :

$$2\varphi(x) = e^{-x} \left( -x + \frac{1}{2} \right) - \varphi''(x) - 2\varphi'(x),$$

montrer que :

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \left( \left[ e^{-x} \left( -x + \frac{1}{2} \right) \right]_0^1 - [\varphi'(x)]_0^1 - 2[\varphi(x)]_0^1 \right).$$

Calculer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $\int_0^1 \varphi(x) dx$ .