

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat C Japon juin 1993 ⌘

EXERCICE 1

4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points : A d'affixe  $-4$  ; B d'affixe  $+4$  ; E d'affixe  $4i$  ; C et D tels que les quadrilatères AOEC et BOED soient des carrés.

1. Placer les points précédents dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et donner les affixes des points C et D.
2. Soit  $f$  la transformation du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  fait correspondre le point  $M'$  d'affixe

$$z' = (1 + i)z + 4 + 4i.$$

- a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .
  - b. Préciser les points  $f(A)$  et  $f(O)$ .  
Déterminer l'image par  $f$  de la droite (CA), et celle de la médiatrice du segment [AO].
  - c. Exprimer, pour tout point  $M$  d'affixe  $z$ , l'affixe des vecteurs  $\overrightarrow{MM'}$  et  $\overrightarrow{MC}$  en fonction de  $z$ . En déduire que  $MM' = MC$  et, pour  $M$  distinct de C, montrer qu'une mesure de l'angle de vecteurs  $(\overrightarrow{MM'} ; \overrightarrow{MC})$  est  $\frac{\pi}{2}$ .
3. Soit J le milieu du segment [EB] et I le milieu du segment [AO].  
Déterminer l'image de J par la rotation de centre I et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  (on justifiera la réponse).

EXERCICE 2

5 points

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que  $AC = 2AB$ .

On désigne par K le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), I l'image de K par la réflexion  $S_1$  d'axe (AB), et J l'image de K par la réflexion  $S_2$  d'axe (AC).

1.
  - a. Faire une figure.
  - b. Démontrer que la droite (BI) est perpendiculaire à la droite (AI) et que la droite (CJ) est perpendiculaire à la droite (AJ).
  - c. Préciser la nature de la composée  $S_2 \circ S_1$  ; puis prouver que A est le milieu de [IJ].
2.
  - a. Soit  $\hat{C}$  l'angle de sommet C dans le triangle ACK.  
Montrer que  $\tan(\hat{C}) = \frac{AK}{CK} = \frac{AB}{AC}$ .
  - b. Quelle est l'image du segment [AK] par la réflexion  $S_1$  ?  
Quelle est l'image du segment [CK] par la réflexion  $S_2$  ?
  - c. Déduire de a. et b. et de la question 1. c. l'égalité  $CJ = IJ$ .
  - d. Soit D le projeté orthogonal de C sur la droite (BI). Montrer que le quadrilatère (CJID) est un carré.

3. On considère un cercle variable ( $\Gamma$ ) passant par C et tangent à la droite (IJ), et on note  $\Omega$  son centre.

Démontrer que  $\Omega$  appartient à une parabole ( $\mathcal{P}$ ) dont on précisera le foyer, la directrice et le sommet.

Justifier que cette parabole passe par le point D. Dessiner ( $\mathcal{P}$ ) sur la figure du 1.

**PROBLÈME****11 points**

Le but du problème est d'étudier dans sa première partie la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}} \text{ puis, dans sa seconde partie, d'établir un encadrement de l'intégrale } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

**Partie A**

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = x - e^{x-1}.$$

- a. Étudier les variations de  $g$  (on ne demande pas dans cette question de calculer les limites de  $g$ ).

Calculer  $g(1)$  et montrer que, pour tout  $x$  réel,  $g(x) \leq 0$ .

- b. En déduire que pour tout  $x$  réel  $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$ , puis  $1 - xe^{-x} > 0$ .

2. On désigne par  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}.$$

Soit ( $C$ ) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 3 cm).

- a. Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

- b. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

- c. Étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variations.

- d. Écrire une équation de la tangente (T) à ( $C$ ) au point d'abscisse 0.

- e. Tracer (T), puis ( $C$ ) (on admettra que ( $C$ ) est au-dessus de (T) pour  $x < 0$ , et au-dessous pour  $x > 0$ ).

3. a. Déterminer les images par  $f$  des intervalles  $[0; 1]$  et  $[1; +\infty[$ .

- b. En déduire que pour tout  $x$  positif ou nul :

$$1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}.$$

**Partie B**

1. Donner une interprétation géométrique du nombre  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul, et soit  $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$ .

- a. À l'aide d'une intégration par parties montrer que  $J_1 = 1 - \frac{2}{e}$ .

**b.** On se propose de calculer  $J_2$  sans utiliser des intégrations par parties ; déterminer les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction  $H(x)$  définie par  $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$  soit une primitive de  $h(x) = x^2e^{-2x}$ .

En déduire  $J_2 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{5}{e^2} \right)$ .

**3.** Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $u_n = 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$ .

**a.** Montrer que, pour tout réel  $x$ ,

$$1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + \dots + x^ne^{-nx} = \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}}.$$

**b.** En déduire que  $I - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$ .

**c.** En utilisant A 1. b., montrer que pour tout  $x$  positif ou nul :

$$0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}.$$

**d.** En déduire un encadrement de  $I - u_n$  ; étudier alors la convergence de la suite de terme général  $u_n$ .

**4.** Montrer que  $u_2 \leq I \leq u_2 + \frac{1}{e^2(e-1)}$ .

Sachant que  $u_2 = 1 + J_1 + J_2$ , trouver deux nombres décimaux  $d_1$  et  $d_2$  tels que  $0 < d_2 - d_1 < 10^{-1}$  et  $d_1 < 1 < d_2$ .