Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Métropole septembre 1993 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit le nombre complexe $u = 1 + \text{i}$ et $\overline{u}$ son conjugué.

1. **a.** Mettre u et $\overline{u}$ sous forme trigonométrique.

   b. Soit n un entier naturel. On pose : $S = u^n + \overline{u}^n$.
   Déduire de a. que $S_n = \lambda_n \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$ où λ_n est un réel à préciser en fonction de n.

   c. Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?

   d. Prouver que si n est pair, S_n est un entier relatif.

2. On suppose que n est un entier naturel pair et on pose $n = 2m$.

   a. Écrire, par la formule du binôme, les développements de $(1+\text{i})^{2m}$ et $(1-\text{i})^{2m}$ à l'aide des puissances de i, puissances que l'on ne cherchera pas à simplifier dans cette question.

   b. Pour p entier naturel, simplifier : $\text{i}^{2p+1} + (-\text{i})^{2p+1}$ et $\text{i}^{2p} + (-\text{i})^{2p}$.

   c. Exemple $n = 24$ (donc $m = 12$) :
   En utilisant les résultats du 1. et ce qui précède, montrer que :

$$\sum_{p=0}^{12} (-1)^p \text{C}_{24}^{2p} = 2^{12}.$$

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère les cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O$'$, de rayons R et R' $(R \neq R')$ sécants en A et B (A $\neq$ B).

1. Soit S_{A} la similitude plane directe de centre A qui transforme O en O$'$. Préciser son rapport et son angle en fonction des données.
   Déterminer l'image de (C) par S_{A}.

2. Soit I le barycentre du système $\left\{(\text{O},\ R')\ ;\ (\text{O}',\ R)\right\}$ et J le barycentre du système $\left\{(\text{O},\ R')\ ;\ (\text{O}',\ -R)\right\}$.

   a. En prenant OO$'$ = 5 cm, R = 4 cm et R' = 2 cm, faire une figure dans laquelle apparaissent I et J.

   b. Montrer que les centres des similitudes planes directes S transformant (C) en (C') sont sur le cercle (Γ) de diamètre [IJ].
   Vérifier que A et B sont sur (Γ) ; construire (Γ).

   c. Montrer qu'il existe deux similitudes, d'angles respectifs $+\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$, transformant (C) en (C'). Préciser leurs centres respectifs.

   d. Montrer que l'ensemble des centres des similitudes planes directes qui transforment (C) en (C') est le cercle (Γ).

PROBLÈME **12 points**

On considère pour n entier naturel non nul, la fonction numérique f_n définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x) = x^2(\ln x)^n \quad \text{pour } 0 < x \leqslant 1, \text{ et } f_n(0) = 0.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Soit p un entier naturel ; en utilisant la limite de $t^p\text{e}^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$, montrer que la limite de $x(\ln x)^p$ lorsque x tend vers 0 est égale à 0.
2. En déduire, pour tout entier $k \geqslant 1$, la limite de $x^k(\ln x)^p$ lorsque x tend vers 0.
3. Montrer que f_n est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0.

Partie B

1. Étudier le sens de variation de f_1 sur $[0\,;\,1]$.
2. **a.** Montrer que pour n entier supérieur ou égal à 1 : $0 < \text{e}^{-\frac{n}{2}} < 1$.

   b. L'entier n étant fixe ($n \geqslant 1$), résoudre dans $]0\,;\,1]$ l'inéquation :

   $$\ln(x) + \frac{n}{2} \leqslant 0$$

   c. Montrer que si $n \geqslant 2$, alors f_n est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et $f_n'(x)$ admet le même signe que $\left(\ln x + \dfrac{n}{2}\right)(\ln x)^{n-1}$ pour tout x élément de $]0\,;\,1]$ tel que $f_n'(x) \neq 0$.

   d. Étudier le sens de variation de f_n sur $[0\,;\,1]$ pour $n \geqslant 2$. (On distinguera deux cas, suivant la parité de n, et on dressera les deux tableaux de variations.)
3. L'unité graphique étant 10 cm, construire $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.
   Déterminer les coordonnées de leurs points communs.
4. Montrer que les courbes $(\mathscr{C}_n)$ passent par deux points indépendants de n. Préciser les coordonnées de ces deux points.

Partie C

Dans cette partie, t désigne un réel appartenant à $[0\,;\,1]$ et n désigne un entier naturel non nul.

1. Prouver que l'intégrale de f_n de t à 1, existe.
   On pose

   $$I_n(t) = \int_t^1 f_n(x)\,\text{d}x \quad \text{et} \quad L_n = \int_0^1 f_n(x)\,\text{d}x.$$
2. Montrer que la fonction $t \longmapsto L_n - I_n(t)$ est la primitive sur $[0\,;\,1]$ de la fonction f_n qui s'annule pour $t = 0$.
3. En déduire que $I_n(t)$ admet pour limite L_n lorsque t tend vers 0.
4. On considère la fonction numérique F définie sur $[0\,;\,1]$ par : x3

   $$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} \text{ pour } 0 < x \leqslant 1, \text{ et } F(0) = 0.$$

   a. Prouver que F est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et calculer $F'(x)$ pour $x \in]0\,;\,1]$

   b. Prouver que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

   c. En déduire que F est une primitive de f_1 sur $[0\,;\,1]$. Calculer L_1.

5. Soit φ_n la fonction définie sur $]0\,;\,1]$ par :

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^n.$$

a. Déterminer la limite de $\varphi_n(t)$ lorsque t tend vers 0.

b. À l'aide d'une intégration par parties prouver que, pour t élément de $]0\,;\,1]$:

$$I_{n+1}(t) = \varphi_n(t) - \frac{n+1}{3}I_n(t).$$

c. En déduire que :

$$L_{n+1} = -\frac{n+1}{3}L_n.$$

d. Prouver, par récurrence sur l'entier naturel non nul n, que :

$$L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^n+1}.$$

e. Calculer en fonction de n l'aire (exprimée en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_n)$ et l'axe des abscisses.