

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Métropole groupe 1¹ juin 1993 ∞

EXERCICE 1

4 points

Enseignement obligatoire

1. a. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$.
Exprimer r_n en fonction de r_0 et de n .
 - b. Soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et de raison $\frac{2}{3}\pi$.
Exprimer θ_n en fonction de θ_0 et de n .
 - c. Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$.
Sachant que z_0, z_1 et z_2 sont liés par la relation $z_0 z_1 z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de z_0, z_1 et z_2 .
2. Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , (unité graphique : 4 cm), on appelle M_n le point d'affixe z_n .
 - a. Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3 dans le plan P .
 - b. Pour tout entier naturel n , calculer $\left\| \overrightarrow{M_n M_{n+1}} \right\|$ en fonction de n .
 - c. On pose

$$\ell_n = \sum_{k=0}^n \left\| \overrightarrow{M_k M_{k+1}} \right\|.$$

Calculer ℓ_n en fonction de n et déterminer la limite de ℓ_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

4 points

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} \right) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B.
 - a. Déterminer les éléments caractéristiques de S_1 .
 - b. Montrer que $S_1(C) = I$. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1 .
2. Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C,
 - a. Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2 .
 - b. Soit M un point de (BI), M' son image par S_2 . On suppose que M et M' sont distincts de I.
Montrer que les quatre points (A, M, I, M') sont cocycliques,

EXERCICE 3
Enseignement de spécialité

4 points

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 Soit (E) la conique d'équation :

$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

1. Préciser la nature de (E), son centre, ses foyers et ses sommets, puis tracer la conique (E).
2. Le réel θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi]$, soit M le point du cercle de centre O et de rayon 5, de coordonnées $(5 \cos \theta; 5 \sin \theta)$.

N est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Au point M on associe le point R de la conique (E) qui a même abscisse que M et dont l'ordonnée a même signe que celle de M . Puis, au point N on associe le point S de la conique (E) qui a même abscisse que N et dont l'ordonnée a même signe que celle de N .

- a. Donner les coordonnées de N , R et S .
- b. Vérifier que $OR^2 + OS^2 = 41$.
- c. Calculer l'aire du triangle ORS .

PROBLÈME

12 points

PARTIE A

1. On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

- a. Dresser le tableau des variations de g .
 - b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique λ telle que $1,89 < \lambda < 1,90$.
 - c. Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.
2. On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

- a. Dresser le tableau des variations de f .
- b. Vérifier que

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2}.$$

En déduire un encadrement de $f(\lambda)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-3}$.

- c. Tracer la représentation graphique de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal en adoptant 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 20 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

PARTIE B

On considère la fonction numérique F définie sur $]0; +\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

1. Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et préciser $F'(x)$.
En déduire le sens de variation de F .
2. a. Vérifier que pour $t \geq 1$ on a :

$$\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}.$$

- b. Pour $x > 0$ on pose :

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt \quad \text{et} \quad J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$.

À l'aide d'une intégration par parties et de l'égalité :

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \quad \text{pour } t > 0, \text{ calculer } J(x).$$

- c. Déduire de ce qui précède que, pour $x > 1$, on a :

$$\ln 2 + \ln \frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

- d. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$.

Sans calculer ℓ , vérifier que, $\ln 2 \leq \ell \leq 1$.

3. Soit G la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x).$$

- a. Calculer $G'(x)$ pour $x > 0$.
- b. Vérifier que pour tout $x > 0$, $G(x) = 0$.
- c. Déduire de ce qui précède la limite de F en 0.