Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 3 [1] juin 1993

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Donner sous forme trigonométrique les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$Z^6 - \text{i} = 0.$$

Représenter leurs images dans le plan complexe.
On les notera par argument croissant entre 0 et 2π :

$$\text{A}_0,\ \text{A}_1,\ \text{A}_2,\ \text{A}_3,\ \text{A}_4,\ \text{A}_5.$$

2. **a.** Montrer que la droite (A_1A_5) coupe le segment $[\text{OA}_0]$ en son milieu.
   b. Soit M_0 le point d'intersection des segments $[\text{A}_0\text{A}_2]$ et $[\text{A}_1\text{A}_5]$·
   Reconnaître le point M_0 dans le triangle OA_0A_1.
   On définit de même les points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, dans les triangles OA_1A_2, $\text{OA}_2 2\text{A}_3$, OA_3A_4, OA_4A_5, OA_5A_6·
3. **a.** Soit m_k l'affixe de M_k pour $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5$.
   Déterminer géométriquement le module et l'argument de m_0 puis de m_k.
   b. Quelle transformation géométrique simple du plan associe, pour tout entier $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5$, le point M_k au point A_k ?
   Qu'en déduit-on pour le polygone $\text{M}_1\text{M}_2\text{M}_3\text{M}_4\text{M}_5$?

EXERCICE 1 **4 points**

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6.

1. On tire successivement trois boules de l'urne, sans remise.
   a. Combien y a-t-il de tirages tels que la troisième boule tirée porte le numéro 2 ?
   b. Combien y a-t-il de tirages tels que la troisième boule tirée porte un numéro pair ?
2. Une boîte comporte six compartiments numérotés de 1 à 6. On place les six boules, au hasard, une par compartiment.
   Quelle est la probabilité pour que quatre boules au moins soient dans un compartiment ayant le même numéro que la boule ?
3. On effectue k tirages successifs d'une boule avec remise (k entier positif).
   Les tirages sont supposés équiprobables.
   a. Calculer la probabilité de tirer au moins une fois la boule qui porte le numéro 6.
   b. Pour quelles valeurs de k cette probabilité dépasse-t-elle 0,9 ?

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

PROBLÈME **4 points**

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ où l'unité de longueur est de 2 cm sur Ox et de 10 cm sur Oy.

Partie A

Dans cette partie on cherche à représenter f.

1. **a.** Calculer f' et vérifier que :

$$f'(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

b. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ l'inéquation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

En déduire le signe de f' sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

c. Dresser, sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, le tableau de variations de f. Préciser les tangentes à C aux deux extrémités de l'intervalle.

2. On note C_1 et C_2 les représentations graphiques, dans le repère choisi, des deux fonctions :

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Donner les abscisses sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ des points où C rencontre C_1 et C_2.

b. Vérifier qu'en chacun des points communs précédents les courbes C et C_1 d'une part, C et C_2 d'autre part, ont même tangente.

c. Représenter sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ les courbes C, C_1 et C_2.

3. On note Φ l'application qui au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + 2\pi \\ y' & = & \mathrm{e}^{-2\pi} y. \end{array}\right.$$

Soit C' l'image de C par Φ.
Montrer que $C' = C$.

Partie B

Dans cette partie on étudie une primitive de f

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \qquad (1)$$

En déduire la solution de (1) qui prend en zéro la valeur zéro et dont la dérivée prend en zéro la valeur un.

b. En observant que si g est une solution de (1) on a

$$g = -\frac{1}{2}\left(2g' + g''\right).$$

donner une primitive de g en fonction de g et g'.
En déduire une primitive de f puis l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \sin t \,\mathrm{d}t.$$

2. On pose $B_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ où k est un entier positif ou nul.
Soit $S_n = B_0 + B_1 + \ldots + B_n$. Exprimer S_n à l'aide de la fonction F.
En déduire que la suite (S_n) admet une limite que l'on précisera.

3. **a.** Donner, sans calculer l'intégrale, le signe de B_k suivant la paraité de l'entier k.

b. Calculer B_0 puis B_k pour k entier positif.
Vérifier que $B_k = (-1)^k \mathrm{e}^{-kx} B_0$.

c. Calculer $T_n = |B| + |B_1| + \ldots + |B_n|$.
Montrer que T_n admet une limite lorsque n tend vers l'infini.
Préciser cette limite.

d. On pose $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $T = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$.
Vérifier que l'on a la relation :

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$$