Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 4 [1] juin 1993

EXERCICE 1 **5 points**

Soit un plan P rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Pour tout point M de coordonnées $(x ; y)$, on désigne par $z = x + \text{i}y$ son affixe. On note A et B les points d'affixes respectives i et -2i.

Soit f l'application du plan P privé de A dans P qui à tout point M d'affixe z distincte de i associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - \text{i}}{\text{i}z + 1}.$$

1. Soit z un nombre complexe différent de i.

a. On désigne respectivement par r et θ le module et un argument de $z - \text{i}$. Interpréter géométriquement r et θ à l'aide des points A et M.

b. Montrer que $\left(z' + 2\text{i}\right)(z - \text{i}) = 1$.

c. On désigne respectivement par r' et θ' le module et un argument de $z' + 2\text{i}$. Exprimer r' et θ' en fonction de r et de θ.
Interpréter géométriquement r' et θ' à l'aide des points B et M'.

2. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

a. Montrer que si M appartient à $\mathscr{C}$, son image M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ de centre B dont on donnera le rayon.

b. Le cercle $\mathscr{C}'$ est-il l'image par f du cercle $\mathscr{C}$?

3. Soit T le point d'affixe $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{i}$.

a. Calculer l'affixe de $\overrightarrow{\text{AT}}$; en déduire que T appartient au cercle $\mathscr{C}$.

b. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{AT}}\right)$.
Tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer le point T (unité graphique : 2 cm).

c. En utilisant les questions précédentes, construire l'image T$'$ du point T par f.

EXERCICE 2 **4 points**

On dispose d'un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître.
Le dé possède trois faces rouges, une face orange et deux faces vertes.
Un jeu consiste à lancer une fois le dé.
La règle est la suivante : le joueur mise 10 F ;

- si la face supérieure du dé est rouge, il ne reçoit rien ;
- si la face supérieure du dé est orange, il reçoit 10 F ;
- si la face supérieure du dé est verte, il reçoit m francs (m est un entier naturel strictement supérieur à 10).

On appelle gain algébrique du joueur la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue d'une partie et sa mise ; on désigne par X la variable aléatoire associant à chaque lancer ce gain algébrique.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
Déterminer la loi de probabilité de X.

1. Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse

2. Déterminer, en fonction de m, l'espérance mathématique de X.

Le jeu est dit « équitable » si l'espérance mathématique de X est nulle ; déterminer m pour qu'il en soit ainsi.

3. L'entier naturel n étant supérieur ou égal à 2, un joueur effectue n lancers consécutifs indépendants.

a. Pour un lancer donné, montrer que la probabilité d'obtenir un gain algébrique strictement positif est $p = 1/3$.

b. Déterminer en fonction de n, la probabilité p_n pour que ce joueur obtienne au moins une fois un gain algébrique strictement positif à l'issue des n lancers.

c. Déterminer le plus petit entier N tel que :

$$p_N \geqslant 0,99.$$

PROBLÈME **11 points**

On désigne par f la fonction numérique définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

On se propose d'étudier la fonction f puis, dans la deuxième partie, deux suites numériques liées à f.

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Étude et courbe représentative de f

1. **a.** Étudier le sens de variation de f.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Dresser le tableau de variation de f.

c. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$; on précisera ses asymptotes.

2. On désigne par (T) la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

a. Déterminer une équation de (T).

b. On désigne par g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = (x-1) - f(x).$$

Calculer $g'(x)$ et vérifier que $\text{g}'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x + 2\left(x\sqrt{x} - 1\right)\right]$.

Calculer $g'(1)$ et étudier le signe de $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]0\ ;1[$ et $]\ ;\ +\infty[$.

c. Calculer $g(1)$ et, à l'aide du sens de variation de g, étudier le signe de $g(x)$.

En déduire la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T).

Partie B

Étude de suites

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 8, on pose :

$$u_n = f(8) + f(9) + \ldots + f(n) = \sum_{k=8}^{n} f(k).$$

On rappelle que, la fonction f étant continue sur $]0~;~+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe quels que soient les nombres a et b strictement positifs.

1. **a.** Soit k un entier supérieur ou égal à 8. Démontrer que :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k).$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 8$,

$$u_{n+1} - f(8) \leqslant \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n$$

c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_n = \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

d. Déduire des questions b. et c. que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 8, on pose :

$$v_n = u_n - \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) et en déduire que :

$$u_n - f(8) \leqslant \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n,$$

puis que la suite (v_n) est bornée.

b. En utilisant la question 1. a., démontrer que la suite (v_n) est croissante.

c. Justifier que la suite (v_n) est convergente et démontrer que sa limite ℓ vérifie :

$$0 \leqslant \ell \leqslant 0,74.$$