Durée : 4 heures

Baccalauréat C Pondichéry juin 1993

EXERCICE 1 — 4 points

À tout nombre complexe z non nul, on associe dans le plan orienté, rapporté au sepère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B, C d'affixes respectives :

$$a = z \quad b = \overline{z} \quad c = \frac{z^2}{\overline{z}}$$

1. On note r le module de z et θ un argument de z.
Exprimer en fonction de r et de θ le module et l'argument de b et c.

2. Comment faut-il choisir z pour que les points A, B, C soient distincts deux à deux ?
Dans la suite de l'exercice on supposera cette condition réalisée.

3. **a.** Montrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle de centre O.

b. Montrer que AB = AC.

c. Le point A étant donné, indiquer une construction géométrique des points B et C. Justifier et réaliser la construction.

4. **a.** Montrer que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{CB}}, \overrightarrow{\text{CA}}\right)$ a pour mesure θ ou $\theta + \pi$.

b. En déduire l'ensemble (E) des points A tels que le triangle ABC soit équilatéral.
Représenter cet ensemble (E) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

EXERCICE 2 — 4 points

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines.
Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien.
Pour un certain type de machines, le technicien constate :
- qu'il doit intervenir la première semaine,
- que s'il est intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à $3/4$,
- que s'il n'est pas intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à $1/10$.

On désigne par E_n l'évènement : « le technicien intervient la n-ième semaine » et par p_n la probabilité de cet évènement E_n.

1. Déterminer les nombres : $p\left(E_1\right)$, $p\left(E_{n+1}/E_n\right)$ et $p\left(E_{n+1}/\overline{E_n}\right)$, puis en fonction de p_n :
$p\left(E_{n+1} \cap E_n\right)$ et $p\left(E_{n+1} \cap \overline{E_n}\right)$.

2. En déduire que pour tout entier n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{13}{20} p_n + \frac{1}{10}.$$

3. On pose $q_n = p_n - \dfrac{2}{7}$.

Montrer que la suite $\left(q_n\right)$ est une suite géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

Pour quelles valeurs de l'entier n, la probabilité que le technicien intervienne la n-ième semaine est-elle inférieure à 3/10 ?

PROBLÈME **11 points**

La partie III *du problème peut être traitée indépendamment de la partie* II

On désigne par f_1 la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$ par :

$$f_1(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right).$$

I. Étude de la fonction f_1

1. **a.** Préciser les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Étudier les variations de f_1 et construire son tableau de variations.

2. Montrer que, pour tout réel x : $f_1(x) = x + \ln\left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right)$.

Déduire de ce qui précède que la courbe (C_1) représentative de la fonction f_1, admet deux droites asymptotes dont la droite (Δ) d'équation : $y = x$. Déterminer la position de (C_1) par rapport à chacune d'elles.

3. Construire la droite (Δ) et la courbe (C_1) dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).

II. Étude d'une intégrale

On désire déterminer un encadrement de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t$.

À cet effet, on considère la fonction g définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \ln 2 - f_1(x).$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction g' (dérivée de g) sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. En déduire le signe de $g'(x)$.

b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et en déduire le signe de $g(x)$.

2. Démontrer que, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$: $0 \leqslant g(x) \leqslant 5 \cdot 10^{-3}$.

3. En déduire un encadrement de l'intégrale I.

Donner pour I une valeur décimale approchée en précisant l'approximation obtenue.

III. Étude géométrique d'une famille de courbes

1. k étant un nombre réel non nul, on désigne par D_k l'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$ de l'inéquation : $\mathrm{e}^x + k > 0$.

a. Selon k, déterminer D_k (on distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$).

À tout réel k, on associe la fonction notée f_k définie pour $x \in D_k$ par :

$$f_k(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + k\right).$$

On désigne par (C_k) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

b. Établir le tableau de variation de f_k pour chacun des cas $k > 0$ et $k < 0$.
En déduire que pour tout réel non nul k, l'image par f de D_k est D_{-k}.

2. **a.** Montrer que si $k > 0$, alors : pour tout réel x,

$$f_k(x + \ln k) = f_1(x) + \ln k.$$

b. En déduire que si $k > 0$, alors la courbe (C_k) représentative de la fonction f_k se déduit de (C_1) par une transformation géométrique simple que l'on justifiera. Construire sans calcul la courbe (C_2) représentative de f_2 dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

3. (Δ) étant la droite d'équation $y = x$, on désigne par S_Δ la symétrie orthogonale d'axe (Δ). On admettra que S_Δ associe à tout point M de coordonnées $(x ; y)$ le point M' de coordonnées $(y ; x)$ dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

a. Montrer que, pour tout réel x de D_k et pour tout réel y de $D_{k'}$ le point M de coordonnées $(x ; y)$ est un point de (C_k) si et seulement si le point M' de coordonnées $(y ; x)$ est un point de (C_{-k}).

b. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.
Construire sans calcul la courbe (C_{-1}) représentative de f_{-1} dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.