Durée : 4 heures

Baccalauréat C Sportifs de haut-niveau septembre 1993

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement de spécialité

Soit $p > 0$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal on note F le point de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}p\right)$ et (D) la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}p$.
On note (P) la parabole de foyer F et de directrice (D).

1. Donner une équation cartésienne de la parabole (P).
2. Soit M un point de (P). On note a et b ses coordonnées et H sa projection orthogonale sur (D).
   Montrer que le cercle de centre M passant par F est tangent en H à la directrice (D).
   Donner une équation de la tangente en M à (P) ainsi qu'une équation de la médiatrice du segment [FH].
   En déduire que ces deux droites sont confondues.
3. Application
   On considère dans le plan une droite (Δ), un point F de (Δ) et un point N n'appartenant pas à (Δ).
   Montrer qu'il existe deux paraboles (P) et (P′) et deux seulement, de foyer F et d'axe (Δ) qui passent par N. On positionnera sur un dessin leur directrice (D) et (D′) par rapport à la droite (Δ) et au cercle de centre N passant par F.
   Donner la position relative des tangentes en N à (P) et à (P′).

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

On considère la suite I définie par :

$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}\,\mathrm{d}x$$

et pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x$.
   b. À l'aide de l'encadrement $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$ valable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :
   $$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}.$$
   c. Montrer que la suite I est convergente et déterminer sa limite.
2. **a.** Calculer I_0, puis I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

b. Établir, en intégrant par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n!}. \qquad (1)$$

3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$J_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

a. En utilisant les relations (1) exprimer J_n à l'aide de I_0 et I_n.

b. En déduire la limite J de la suite (J_n).

c. Justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant J - J_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}.$$

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté on considère un cercle (C) de centre O et de rayon 1,5 et un cercle (C') de centre O$'$ et de rayon 3. On suppose de plus que la distance de O à O'est égale à 6. Faire une figure (unité graphique : 1 cm).

1. On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{M\mathrm{O}'}{M\mathrm{O}} = 2$.

a. Montrer que si I est le centre d'une similitude directe qui transforme (C) en (C') alors I est un point de (Γ).

b. Montrer que (Γ) coupe la droite (OO') en deux points A et B que l'on caractérisera comme barycentres des points O et O$'$.

c. Montrer que M est élément de (Γ) si et seulement si MA . ME = O.

Déterminer (Γ) et le représenter sur la figure.

2. On veut prouver l'existence et l'unicité d'une similitude directe f d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme (C) en (C').

a. Dans cette question on admet l'existence de f.

Quelle est alors l'image de O par f et quel est le rapport de f ?

Soit T le point d'intersection de (C) avec le segment $[\mathrm{OO}']$.

Déterminer l'image T' de T par f.

b. En déduire l'existence et l'unicité de f ; construire le centre de f (on expliquera la construction).

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{3}{2} \quad \text{et } f(x) = 2x\ln x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} \text{ pour } x > 0$$

(ln désigne le logarithme népérien).

L'objet du problème est l'étude de f et l'encadrement d'une aire.

Partie I Étude d'une fonction auxiliaire et de ses zéros

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 2\ln x - x + 1.$$

1. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g.
   Étudier les variations de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ deux solutions 1 et α.
   En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. À l'aide de la calculatrice vérifier que :

$$3,5 \leqslant \alpha \leqslant 4.$$

Partie II Étude de f

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f' = g$ (pour $x > 0$).
   Étudier les variations de f sur $]0~;~+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   a. Montrer que f est continue en zéro.
   b. Calculer la limite de $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers zéro par valeurs strictement positives. Que peut-on en conclure ?
3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ deux solutions 1 et β.
   b. Justifier les inégalités : $5 \leqslant \beta \leqslant 6$.
4. La tangente (D) à la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f au point d'abscisse 5 à pour équation $y = h(x)$.
   a. Calculer $h(x)$ et étudier les variations de la fonction Δ définie sur $]5~;~+\infty[$ par :

$$\Delta(x) = f(x) - h(x).$$

   En déduire que pour $x \geqslant 5$ on a $f(x) \leqslant h(x)$.
   b. Soit γ l'abscisse du point d'intersection de (D) et de l'axe Ox.
   Calculer y et prouver que $\beta \leqslant \gamma$.
5. Rassembler dans un tableau les résultats obtenus sur f. Tracer la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans un repère orthonormal d'unité 2 centimètres.

Partie III Un encadrement

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = x^2 \ln x - \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}.$$

1. Vérifier que F est sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ la primitive de f qui s'annule au point 1.
2. On pose $A = \displaystyle\int_1^{\beta} f(x)\,\text{d}x$.
   a. Montrer que : $F(5) \leqslant A$. (1)
   b. Montrer que :

$$A \leqslant F(5) + \int_5^{\beta} h(t)\,\text{d}t.$$

   Prouver que : $\displaystyle\int_{\beta}^{\gamma} h(t)\,\text{d}t \geqslant 0$.

En déduire l'inégalité :

$$A \leqslant F(5) + \int_5^{\gamma} h(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (2)$$

c. Donner une interprétation géométrique des inégalités (1) et (2).

3. Donner un encadrement de A à 10^{-2} près.