

SERIE : D
Code de matière : 08

EPREUVE : MATHEMATIQUES
Durée : 3 heures 15 minutes
Coefficient : 4

N.B. : - Les Quatre Exercices sont obligatoires

EXERCICE 1 (20 points)

1° Soit $P(z) = z^2 - z + 7 - 9i$ un polynôme à variable complexe z .

- a) Calculer $(1 + 2i)^2$. (1 pt)
b) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$. (4 pts)
On note par α et β ces solutions telles que la partie réelle de α est positive.
On pose $Z = \alpha\beta + \bar{\beta}$ (\bar{z} désigne le conjugué de z).
c) Donner la forme trigonométrique de Z . (3 pts)
d) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que Z^n soit imaginaire pur. (2 pts)

2° Dans le plan complexe \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -1 - 3i$ et \bar{z}_2 .

Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point C et transforme A en B.

- a) Déterminer l'expression complexe de S . (3 pts)
b) Préciser les éléments caractéristiques de S . (3 pts)
c) On note S^{-1} la transformation réciproque de S . Montrer que S^{-1} est la composition d'une rotation \mathcal{R} et d'une homothétie \mathcal{H} de même centre dont on donnera les expressions complexes. (4 pts)

EXERCICE 2 (20 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. On note par (C) sa courbe représentative

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

- 1° a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (8 pts)
b) Préciser les branches infinies de (C) . (2 pts)
2° a) Déterminer le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. On note par a_1 son abscisse. (1 pt)
b) Montrer que (C) admet un point d'inflexion au point d'abscisse a_4 que l'on précisera. (2 pts)
c) Tracer (C) . (2 pts)

3° Soit $I = \int_{\sqrt{e}}^e f(x) dx$.

- a) Interpréter géométriquement I . (1 pt)
b) Calculer I en cm^2 à 10^{-1} près. (2 pts)

4° On considère les nombres réels a_1, a_2, a_3 et a_4 tels que a_1 et a_4 sont définis dans la question 2 et a_3 l'abscisse de l'extrémum de (C) .

- a) Déterminer a_2 pour que a_1, a_2, a_3, a_4 constituent dans cette ordre les quatre premiers termes d'une suite géométrique (a_n) , $n \in \mathbb{N}^*$. (2 pt)
b) Exprimer a_n en fonction de n . (1 pt)
c) Vérifier que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse a_2 passe par l'origine O. (2 pts)

(20 points)

1° Dans le plan affine euclidien \mathcal{P} , on considère le triangle équilatéral ABC de côté 4cm, par D le milieu de sa base $[BC]$:

2° Soient S et S' les systèmes des points pondérés :

$S = \{(A,4); (B,1); (C,1)\}$ et $S' = \{(A,1); (D,2)\}$ de barycentres respectifs G et Ω .

3° Construire en vraie grandeur le triangle ABC et placer le point D.

(2 pts)

2° a)- Déterminer les coordonnées du point G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et vérifier que

(3 pts)

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}.$$

b)- Exprimer $\overrightarrow{\Omega D}$ en fonction de \overrightarrow{AD} et en déduire que les points G, Ω et D sont alignés.

(3 pts)

c)- Déterminer l'ensemble des points M du plan \mathcal{P} vérifiant :

$$(4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD}) = 0. \text{ On note par (E) cet ensemble.}$$

(3 pts)

d)- Placer les points G et Ω ; et construire l'ensemble (E).

(3 pts)

3° Soit f la transformation de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui transforme M en $M' = f(M)$ tels que :

$$2\overrightarrow{MM'} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

a)- Déterminer la nature de f et préciser ses éléments géométriques.

(3 pts)

b)- Construire le transformé du triangle ABC par f.

(3 pts)

EXERCICE 4 (20 points)

N.B. : « Les questions 1 et 2 sont indépendantes »

On dispose de quatre trous A, B, C, D et de trois boules numérotées 1, 2, 3.

1° On lance les trois boules vers les quatre trous. Chaque boule entre alors dans un trou et chaque trou peut contenir n'importe quel nombre de boules.

On suppose l'hypothèse d'équiprobabilité.

a)- Déterminer le nombre de résultats possibles.

(2 pts)

b)- Déterminer la probabilité des événements suivants :

M : « Chaque trou contient au plus une boule ».

(2 pts)

O : « Les trois boules se trouvent dans un même trou ».

(2 pts)

I : « Un trou contient exactement 2 boules ».

(2 pts)

c) Calculer la somme des probabilités : $p(M) + p(O) + p(I)$. Interpréter ce résultat.

(2 pts)

2° On met maintenant toutes les boules dans un sac.

Si on tire une boule du sac, la probabilité p_i pour que cette boule porte le numéro i (pour $i \in \{1, 2, 3\}$) est définie par les relations $p_1 = p_2$ et $p_1 = 2p_3$.

a)- Calculer les probabilités p_1 , p_2 et p_3 .

(3 pts)

b)- L'épreuve consiste à : « tirer une boule du sac, on note par α son numéro, on la remet dans le sac ; puis, on tire une seconde boule et on note par β son numéro ». Soit X la variable aléatoire qui, à cette épreuve, associe la valeur $\alpha^2 + \beta^2$.

i)- Déterminer l'univers image de X.

(1 pt)

ii)- Donner la loi de probabilité de X.

(6 pts)