Série : **A**

Code matière : 009

Epreuve de	:	MATHEMATIQUES
Durée	:	2 Heures 15 mn
Coefficients	:	A1 = 1 ; A2 = 3

N.B. : - Le candidat doit traiter les DEUX Exercices et le Problème.
- Machine à calculer autorisée.

Exercice I (5 pts)

Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques définies respectivement par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2 - U_n} \text{ pour tout entier } n \end{cases}$$

$$\text{et } V_n = \frac{1}{U_n - 1}$$

1°) Calculer U_1, U_2, V_0, V_1. *0,25 x 4 pt*

2°) a) Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -1 *1 pt*

b) Donner l'expression de V_n puis U_n en fonction de n. *0,5 + 0,5 pt*

3°) Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$

et $P_n = W_0.W_1. \ldots .W_{n-1}$

avec $W_n = e^{V_n}$

a) Calculer S_n en fonction de n. *1 pt*

b) En déduire l'expression de P_n en fonction de n, *0,5pt*

puis la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$. *0,5 pt*

Exercice II (5 pts)

On dispose d'un portefeuille contenant 10 billets de banque dont 2 billets de 1.000 Ar, 3 billets de 2.000 Ar, 4 billets de 5.000 Ar et 1 billet de 10.000 Ar.

1°) On tire successivement et sans remise 3 billets du portefeuille.

a) Déterminer le nombre des cas possibles. *1 pt*

b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir exactement 2 billets de 5.000 Ar » *1 pt*

B : « Obtenir au plus 2 billets de 2.000 Ar » *1 pt*

2°) On tire simultanément 4 billets du portefeuille.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C : « avoir un montant total de 14.000 Ar » *1 pt*

D : « avoir un montant total supérieur ou égal à 25.000 Ar ». *1 pt*

Problème (10 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x+1).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1°) a) Calculer la limite à droite de f en -1. (0,5 ; 0,5)
Interpréter graphiquement ce résultat. (0,5 ; 0,5)

b) Calculer la limite de f en $+\infty$. (0,5 ; 0,5)

2°) a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f. (1,25 ; 1)

b) Vérifier que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ (0,5 ; 0,5)

c) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. (1,5 ; 1,25)

3°) a) Montrer que le point O est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C})$. (1 ; 0,75)

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 0$. (1,25 ; 1)

c) Calculer à 10^{-1} près : $f(-\frac{1}{2})$; $f(1)$ et $f(2)$. (1,5 ; 0,75)

(On donne $\ln 2 = 0,7$; $\ln 3 = 1,1$)

4°) Tracer la tangente (T) et la partie de $(\mathscr{C})$ qui représente la fonction f dans l'intervalle $]-1, 2]$. (1,5 ; 1)

Pour A2 seulement

5°) Pour $x \in]-1, +\infty[$, on pose $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$

a) Calculer la dérivée $g'(x)$ de g et vérifier que

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 1 + g'(x)$$

b) Calculer en cm². l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. (; 1,25)