République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2016
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) : $5x-3y=17$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(4,1)$ est une solution particulière de (E). (0,75 pt)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E). (0,75 pt)

2) Soit (x,y) une solution de (E).

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17. (0,75 pt)

b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ soit un entier relatif. (0,75 pt)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(4+8i)z^2+(-14+24i)z+32+4i$.

1.a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$. (1 pt)

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. On note z_1, z_2 et z_3 ses solutions avec $|z_1|<|z_2|<|z_3|$. (1 pt)

c) Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O,5);(A,-7);(C,4)\}$. Placer A, B ,C et G sur la figure. (0,75 pt)

2) Pour tout nombre complexe z on pose : $Q(z)=z^2-(4+6i)z-2+16i$.

On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Q(z)$ soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant $z=x+iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une conique de centre G. (0,75 pt)

b) Préciser les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent. (0, 5 pt)

Exercice 3 (4 points)

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Interpréter. (1 pt)

b) Calculer et interpréter les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$. (0,75 pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,5 pt)

d) Construire, dans le repère précédent la courbe (C). (0,25 pt)

2) On définit pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction f_n par $\begin{cases} f_n(x)=xe^{\frac{n}{x}} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$.

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère précédent $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que (C_n) est l'image de (C) par une homothétie h_n de centre O dont on précisera le rapport. (0,5 pt)

b) Montrer que tous les points M_n de (C_n) en lesquels la tangente est horizontale, sont situés sur une même droite Δ dont on donnera une équation. (0,5 pt)

c) Sans étudier f_2, déduire de ce qui précède le tableau de variation de f_2 et la construction de sa courbe (C_2) dans le même repère. Justifier. (0,5 pt)

Exercice 4 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter. (0,75 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,75 pt)

c) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées. (0,25 pt)

d) Tracer la courbe (C). (0,25 pt)

2. a) Calculer $\int_0^x \ln(1+t)dt$ et déterminer la primitive F de f sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0 (On pourra écrire $f(x)=\ln(x+1)-1+\dfrac{1}{x+1}$). (0,25 pt)

b) Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on note A_n l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\dfrac{1}{n}$. Donner l'expression de A_n en fonction de n. (0,25 pt)

3) Dans la suite de l'exercice on prendra x réel tel que $x\in]0;1[$ et n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout n: $$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1}+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}.$$ (0, 5 pt)

b) En déduire que : $\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}+(-1)^{n+1}\int_0^x\dfrac{t^{n+1}}{1+t}dt$. (0,25 pt)

c) En utilisant a) et b) ; montrer que : $$f(x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k+\frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt.$$ (0,25 pt)

d) Montrer que : $0\leq\int_0^x\dfrac{t^{n+1}}{1+t}dt\leq\dfrac{x^{n+2}}{n+2}$. (0,25 pt)

e) En déduire que : $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\dfrac{1-k}{k}x^k$. (0,25 pt)

Exercice 5 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O et de coté a $(a>0)$.
I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les points E et F tels que $LDEF$ soit un carré direct.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0, 5 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en D et L en E. (0, 5 pt)

c) Déterminer un angle et le centre de cette rotation. (0,5 pt)

2) a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme J en O et C en D. (0,5 pt)

b) Déterminer l'angle et le rapport de s_1. (0,5 pt)

c) Déterminer $s_1(B)$ que peut-on en déduire à propos du centre de s_1. (0,25 pt)

d) Déterminer $s_1(O)$ puis construire l'image du carré ABCD par s_1. Justifier la construction. (0,25 pt)

3) Soit s_2 la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer $s_2(O)$ et $s_2(C)$ (0,25 pt)

4) On pose $f=s_2\circ s_1^{-1}$ et pour tout point M du plan, on note $M_1=s_1(M)$, $M_2=s_2(M)$.

a) Déterminer $f(D)$ et caractériser f. (0,5 pt)

b) Montrer que si $M_1\neq M_2$ alors la droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,5 pt)

c) Déterminer l'ensemble Γ_1 des point M du plan pour les quels les points M, M_1 et M_2 sont alignés. (On pourra utiliser l'angle $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$). (0,25 pt)

5.a) Vérifier que O est le barycentre du système $\{(A,1);(D,3);(E,-2)\}$. (0,25 pt)

b) Déterminer les ensembles Γ_2 et Γ_3 des points M du plan tels que :

$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow 2MA^2+6MD^2-4ME^2=a^2$,

$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{ME})(2\overrightarrow{ML}+2\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MB})=0$. Que peut-on remarquer ? (0, 25 pt)

Fin.