

Exercice 1 (3 points)

Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La suite de terme général $\left(\frac{e}{4}\right)^n$ est	décroissante	croissante	divergente	(0,5)
2	Si, pour tout n de \mathbb{N} , $ u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	(0,5)
3	Si $s = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2015}$ alors :	$s = 2^{2015} + 1$	$s = 1 - 2^{2016}$	$s = 2^{2016} - 1$	(0,5)
4	Si (v_n) est une suite arithmétique de raison r telle que $v_3 = 0$ et $v_5 = -6$ alors :	$\begin{cases} r = -3 \\ v_0 = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} r = -2 \\ v_0 = -9 \end{cases}$	$\begin{cases} r = -3 \\ v_0 = 9 \end{cases}$	(0,5)
5	Toute suite croissante et majorée est :	non bornée	convergente	divergente	(0,5)
6	Soit (w_n) une suite définie sur \mathbb{N}^* telle que $0 \leq w_n \leq \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ alors :	$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$	(0,5)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1. On pose $P(z) = z^3 - 7z^2 + 18z - 12$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(1)$.

(0,5 pt)

b) Déterminer deux réels a et b tels que : $P(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$.

(0,5 pt)

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $P(z) = 0$.

(0,5 pt)

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 3 + i\sqrt{3}$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_A , z_B et z_C .

(0,5 pt)

b) Placer les points A , B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

(0,5 pt)

3.a) Calculer le module du complexe suivant : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

(0,5 pt)

b) En déduire la nature du triangle ABC .

(0,5 pt)

4.a) Déterminer z_D affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer D .

(0,5 pt)

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que

$$\left| \frac{z - 1 - 2i\sqrt{3}}{z - 1} \right| = 1.$$

(0,5 pt)

c) Déterminer z_I affixe du point I milieu de $[AD]$. Déterminer la nature du triangle IBC

(0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = xe^x - e^x + x - 1$.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Calculer et interpréter $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x - 1))$.

(0,5 pt)

b) En remarquant que $f(x) = (x - 1)(e^x + 1)$ calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(0,5 pt)

c) Déterminer et interpréter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(0,5 pt)

2.a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ où f' et f'' sont respectivement la dérivée et la dérivée seconde de f .

(0,5 pt)

b) Calculer $f'(-1)$ et préciser son signe.

(0,5 pt)

c) Etudier les variations de f' et en déduire le signe de $f'(x)$.

(0,5 pt)

3. Dresser le tableau de variation f .

(0,5 pt)

4. Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées puis la construire.

(0,5 pt)

5.a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = f'(x) - e^x + x - 2$. En déduire une primitive F de f sur \mathbb{R} .

(0,5 pt)

b) Calculer l'aire S du domaine plan délimité par la courbe (C) et les axes de coordonnées.

(0,5 pt)

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 - \ln x$.

1.a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(1 pt)

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.

(0,75 pt)

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

(0,75 pt)

3. Donner une équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse $x_0 = e$.

(0,5 pt)

4.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β ($\alpha < \beta$) et que

$$0,1 < \alpha < 0,2 ; 3,1 < \beta < 3,2 . \text{ Démontrer que : } \frac{e^\alpha}{e^\beta} = \frac{\alpha}{\beta} .$$

(1 pt)

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.

(0,5 pt)

5. Soit g la restriction de f sur $I = [1; +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

(0,5 pt)

b) Calculer $(g^{-1})'(e - 3)$, (On pourra utiliser la question 3)

(0,5 pt)

6. Tracer (C) et (C') courbes respectives des fonctions f et g^{-1} dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(0,5 pt)

7.a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_1^e \ln x dx$.

(0,5 pt)

b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

(0,5 pt)

Fin.