

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (11 + 6i)z^2 + (28 + 38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de \mathbb{C} :

$$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b).$$

(0,5 pt)

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

(1 pt)

c) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$. Calculer l'abscisse du point G barycentre du système $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$ et placer les points A, B, C et G .

(0,5 pt)

2) Pour tout réel k différent de 2, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}.$$

a) Pour quelles valeurs de k , l'application f_k est une translation? Déterminer alors son vecteur.

(0,5 pt)

b) On suppose que $k \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k . Reconnaître alors f_k et donner ses éléments caractéristiques en fonction de k .

(0,5 pt)

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$. Reconnaître Ω_1 .

(0,5 pt)

d) Pour $k=1$; déterminer et construire le lieu géométrique du point R centre de gravité du triangle AMM' lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C .

(0,5 pt)

3) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = m$, où m est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de m , la nature de Γ_m .

(0,5 pt)

b) Déterminer et construire Γ_m pour $m = 10$.

(0,5 pt)

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct $ABCD$ de longueur AD tel que $AB=a$ et $AD=2a$, ($a > 0$). Soient I , J , K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit O le centre du rectangle $ABCD$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes.

(0,5 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en C et J en D . Préciser le centre et un angle de r .

(0,5 pt)

2.a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme I en C et A en K .

(0,25 pt)

b) Montrer que g est une symétrie glissante et vérifier que $g = t_{IC} \circ s_{AB}$.

(0,5 pt)

c) Déterminer une droite Δ telle que $t_{BC} = s_{\Delta} \circ s_{AB}$. En déduire la forme réduite de g , (on pourra remarquer que $t_{IC} = t_{IB} \circ t_{BC}$).

(0,25 pt)

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme A en C et B en L . Déterminer l'angle et le rapport de s . Montrer que $s(J) = B$.

(0,5 pt)

- b) Soient Γ_1 le cercle de centre A passant par B, et Γ_2 le cercle de centre C passant par L. Justifier que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$ (0,25 pt)
- 4) On désigne par P le centre de s.
- a) Montrer que P est situé sur les cercles Γ_1 et Γ_2 . Préciser P. (0,25 pt)
- b) Vérifier que P est le symétrique de L par rapport à (AC). (0,25 pt)
- c) Soit E le symétrique de L par rapport à D. Vérifier que P est situé sur la droite (BE). (0,25 pt)
- 5.a) Soit R le symétrique de L par rapport à J. Montrer que $s(L) = R$. (0,25 pt)
- b) Soit M un point de Γ_1 distinct de P. On note $s(M') = M''$. Montrer que :
- i) La droite (MM') passe par un point fixe que l'on précisera. (0,25 pt)
- ii) Le triangle MM'M'' est rectangle isocèle. (0,25 pt)
- 6) Soit Γ la parabole de foyer L et de directrice (BC).
- a) Montrer que Γ passe par A, O et D. (0,25 pt)
- b) Préciser la tangente à Γ en A et tracer Γ . (0,25 pt)
- c) Déterminer et construire le foyer et la directrice de $\Gamma' = s(\Gamma)$. (0,25 pt)

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1.a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement. (0,75 pt)
- b) Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)
- c) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère. (0,5 pt)
- 2.a) Vérifier que le point $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C). (0,25 pt)
- b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$. (0,5 pt)
- c) Tracer les courbes (C) et (C'). (0,5 pt)
- d) Calculer, en fonction de α , l'aire A du domaine plan limité par les courbes (C) et (C'), et les axes des coordonnées (On pourra remarquer que $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$). (0,25 pt)
- 3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^\alpha f^n(t) dt$ où α est le réel trouvé en 2.b)
- a) Justifier que $I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$. (0,25 pt)
- b) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$. (0,25 pt)
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left(\alpha^n - \frac{1}{2^n} \right)$. (0,5 pt)
- d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ? (0,25 pt)
- 4.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,25 pt)
- b) Montrer que $I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\alpha^k - \frac{1}{2^k} \right)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\alpha^k - \frac{1}{2^k} \right)$. (0,25 pt)

Exercice 4 (5 points)

1) On considère la fonction numérique g définie sur \mathbb{R}^* par :

$$g(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

a) Déterminer a , b et c tels que pour tout x de \mathbb{R}^* : $g(x) = \frac{(x-1)(ax^2 + bx + c)}{x(x^2 - 4x + 5)}$.

(0,5 pt)

b) Etudier le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R}^* .

(0,5 pt)

2) On considère la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = 3x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, interpréter graphiquement.

(0,5 pt)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(0,5 pt)

c) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une, notée D , est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D .

(0,5 pt)

3.a) Vérifier que $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction définie en 1), et dresser le tableau de variation de f .

(0,5 pt)

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1} .

(0,5 pt)

c) Construire (C).

(0,5 pt)

4) On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 3x - 3$, $x = 3$ et $x = 2 + \sqrt{3}$.

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 5} = 2 \left(1 + \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} - \frac{1}{1 + (x - 2)^2} \right)$.

(0,25 pt)

b) Calculer $A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} dx$.

(0,25 pt)

c) En posant $x = 2 + \tan t$ pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$; calculer $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1 + (x - 2)^2} dx$.

(0,25 pt)

d) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_2^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2 - 4x + 5) dx$ et $K = 2 \int_2^{2+\sqrt{3}} \ln x dx$. En Dédire le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire.

(0,25 pt)

Fin.