République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2014

Session Complémentaire

1435 رمضان

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) : $11x + 9y = 19$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Vérifier que $(-4,7)$ est une solution particulière de (E). (0,5 pt)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E). (1 pt)

2) Uniquement , pour la série C

Une variable aléatoire réelle X ne prend que trois valeurs : -4, 7 et 8, avec les probabilités respectives: $p_1 = \frac{x-4}{9}$, $p_2 = \frac{2x-y-8}{9}$, $p_3 = \frac{8x+10y+2}{9}$.

a) Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers (x, y) tel que ces coordonnées soient acceptables. Préciser le. (0, 75 pt)

b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = 6$. (0, 5 pt)

c) Calculer la variance de X. (0,25 pt)

2.bis) Uniquement , pour la série TMGM

On considère l'équation (E') : $(11-9i)z + (11+9i)\bar{z} = 38$, d'inconnue complexe. $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

a) Soit M(x,y) un point d'affixe z où z est une solution de (E'). Montrer que l'équation (E') admet une infinité de solutions et déterminer le lieux géométriques Δ des points M(x,y). (0,7 5 pt)

b) Quels sont les points M(x,y) de Δ dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? (0, 75 pt)

Exercice 2 (4 points)

1) Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (-2-8i)z - 8 + 4i$.

a) Calculer $P(2i)$. (0,75 pt)

b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. (1 pt)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation f d'expression : $z' = \frac{1}{3}iz + \frac{2}{3} + 2i$.

a) Montrer que f est une similitude directe. Préciser le centre A , le rapport et un angle de f. (0,75 pt)

b) Calculer l'affixe z_C du point C image de $B(-3,-1)$ par f. Placer les points A, B et C sur la figure et montrer que le triangle ABC est rectangle. (0,75 pt)

c) Calculer l'affixe z_G du point G barycentre du système $S = \{(A,-4);(B,1);(C,6)\}$. Vérifier que les points A, B, C et G sont cocycliques. (0,25 pt)

3) Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan définis par :

a) $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow -4MA^2 + MB^2 + 6MC^2 = 30$ (0,25 pt)

b) $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = 16$. (0,25 pt)

Exercice 3 (4 points)

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = -x^2 - \ln x$.

a) Dresser le tableau de variation de g. (0,5 pt)

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. En déduire le signe de $g(x)$. (0,75 pt)

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=-x+1+\frac{1}{x}(1+\ln x)$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$. Interpréter graphiquement. **(0,25 pt)**

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(1-x))$. Interpréter graphiquement. **(0,25 pt)**

c) Vérifier que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de f. **(0,75 pt)**

d) Construire la courbe représentative de f. **(0,25 pt)**

3) Soit f_m la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f_m(x)=-x+1+\frac{m^2}{x}(1+\ln x-\ln m)$, où m est un paramètre réel strictement positif.

a)Montrer que les courbes (C_m) représentatives des fonctions f_m dans un repère cartésien, admettent les mêmes asymptotes, dont on précisera le point d'intersection, noté G. **(0, 5 pt)**

b) Montrer que (C_m) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre G dont on précisera le rapport. **(0, 5 pt)**

c) Déduire le tableau de variation de f_m à partir de celui de f. **(0, 25 pt)**

<u>Exercice 4 (5 points)</u>

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre O et de côté a, $(a>0)$.

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale) **(0,75 pt)**

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme A en B et C en A. **(0,5 pt)**

c) Déterminer un angle de r_1 et préciser son centre. **(0,5 pt)**

d)On considère la rotation r_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer $r_1 o r_2(B)$ et caractériser $r_1 o r_2$. **(0,5 pt)**

2) On considère les points D et E symétriques respectifs de I et J par rapport à K.

a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme A en K et J en E. **(0,5 pt)**

b) Justifier que g est une symétrie glissante. Déterminer g(D) et donner la forme réduite de g. **(0,5 pt)**

4.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme B en I et C en J. **(0,25 pt)**

b) Déterminer le rapport et un angle de s_1. Justifier que O est le centre de s_1. **(0,5 pt)**

5) On considère les points $M\in[BC]$, $N\in[CA]$, $P\in[AB]$, tels que $BM=CN=AP=x$, $x\in[0,a]$.

a) Montrer que le triangle MNP est équilatéral et de centre O. **(0,25 pt)**

b) Soit H le milieu de $[MN]$. Déterminer le lieu géométrique de H lorsque M décrit $[BC]$. **(0,25 pt)**

c) A partir d'une position donnée de M sur $[BC]$, montrer qu'il existe une unique similitude directe s_2 qui transforme (A,B,C) en (P,M,N). Préciser son centre. **(0,25 pt)**

d) Préciser la position de M sur $[BC]$ pour laquelle, le quotient $\lambda=\frac{OM}{OB}$ est minimal. En déduire la position de M sur $[BC]$ pour laquelle l'aire du triangle MNP est minimale. **(0,25 pt)**

<u>Exercice 5 (4 points)</u>

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x}{e^x-x}$.

Soit Γ sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Donner une interprétation graphique. **(0,5 pt)**

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Donner une interprétation graphique. (0,5 pt)

c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe Γ, (On remarquera que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$). (0,75 pt)

2) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Montrer que $1 \le A \le \dfrac{e}{e-1}$. On ne cherche pas à calculer la valeur exacte de A. (0,25 pt)

3) Pour tout entier naturel n, on pose: $I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$, pour $n \in \mathbb{N}^*$; et $I_0 = 1$

a) Montrer que $I_1 = 1 - 2e^{-1}$, (On pourra utiliser une intégration par parties). (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n > 1$ on a , $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. (0,5 pt)

4) On pose pour tout entier naturel n : $S_n = I_0 + I_1 + \ldots + I_n$.

a) Justifier que : $S_n = \int_0^1 \dfrac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}} dx$. (0,25 pt)

b) Montrer que : $A - S_n = \int_0^1 \dfrac{(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}} dx$. (0,25 pt)

c) Montrer que : $0 \le A - S_n \le \dfrac{2}{n+2}$. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = A$. (0,25 pt)

d) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$, A soit une valeur approchée de S_n à 10^{-2} près. (0,25 pt)

Fin.