Baccalauréat 2013
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) : $25x-9y=5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $25u+9v=1$. En déduire une solution particulière (x_0,y_0) de (E). (1 pt)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E). (0,75 pt)

2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x,y) est une solution particulière de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ? (0,5 pt)

b) Quelles sont les solutions (x,y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux? (0,5 pt)

c) Peut-on trouver un couple (x,y) d'entiers relatifs tel que (x^2,y^2) soit solution de (E) ? Justifier votre réponse. (0,25 pt)

Exercice 2 (3.5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(9-i)z^2+(28-5i)z-32+4i$.

1.a) Calculer $P(4)$ et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-4)(z^2+az+b)$ (1 pt)

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. (0, 5 pt)

2) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $z_A=4$, $\operatorname{Im} z_B>0$ et $\operatorname{Im} z_C<0$.

a) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre C qui transforme A en B. (0,5 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de s. (0,5 pt)

3) Pour tout nombre complexe z on pose : $Q(z)=z^2-(5-i)z+8-i$.

On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Q(z)$ soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant $z=x+iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une hyperbole de centre $\Omega(\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$. (0, 5 pt)

b) Préciser les sommets et les asymptotes de Γ puis la construire. (0,5 pt)

Exercice 3 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-x)e^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$. (0, 5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0, 5 pt)

c) Tracer la courbe (C). (0,25 pt)

d) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'-y=-e^x$ et calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$. (0, 5 pt)

2) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$U_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{3}{4}$. (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq U_n \leq \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. (0, 5 pt)

3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$; on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x dx$ et

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \dfrac{3^2}{2!} + \dfrac{3^3}{3!} + ... + \dfrac{3^n}{n!}$.

a) Justifier que $I_1 = e^3 - 4$ (0,25 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq (e^3 - 1)U_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. (0,5 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$. (0,25 pt)

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$e^3 = 1 + 3 + \dfrac{3^2}{2!} + \dfrac{3^3}{3!} + ... + \dfrac{3^n}{n!} + I_n$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e^3$. (0,25 pt)

<u>Exercice 4 (4.5 points)</u>

1) On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x \quad \text{si} \quad x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue en 0^+ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. (0,5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de g . (0,5 pt)

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$. (0,5 pt)

2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^3}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (0,5 pt)

b) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1 + x^3)^2}$. En déduire le tableau de variation de f . (0,5 pt)

3) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on pose $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[1, +\infty[$. Calculer $F'(x)$ et déterminer le sens de variations de F. (0, 5 pt)

b) Vérifier que pour tout t de $[1, +\infty[$, on a : $\dfrac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \dfrac{\ln t}{t^3}$ (0,25 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}dt$.

d) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $t > 0$; (0,25 pt)

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2} \quad .$$ (0,25 pt)

4.a) En utilisant les résultats précédents, déduire que pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \le F(x) \le \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$$ (0,25 pt)

b) On admet que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell$. Montrer que : $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \le \ell \le \frac{1}{4}$. (0,25 pt)

c) Tracer l'allure générale de la courbe de F. (0,25 pt)

Exercice 5 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O et de coté a $(a > 0)$.

I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,75 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme C en O et K en I. (0,5 pt)

c) Déterminer un angle et le centre de cette rotation. (0,5 pt)

2) Soit $f = S_{IJ} \circ S_{JO} \circ S_{OK}$.

a) Vérifier que $f = r \circ S_{OK}$ et déterminer $f(D)$, $f(K)$ et $f(O)$. (0, 5 pt)

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f et donner sa forme réduite. (0,5 pt)

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme B en I et L en A puis déterminer le rapport λ_1 de s_1. (0,5 pt)

b) Soit α une mesure de l'angle de s_1. Montrer que $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. (0, 25 pt)

c) Soit P le centre de s_1. E le symétrique de C par rapport à B. Montrer que le point P est situé sur les cercles circonscrits aux triangles BEI et BAL. Préciser P et le placer sur la figure. (0, 25 pt)

d) Montrer que $(\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{PA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. En déduire que les points A,P et E sont alignés. (0, 25 pt)

4) Soit s_2 la similitude directe de centre B qui transforme C en L . On note β une mesure de son angle . Soit $g = s_1 \circ s_2$.

a) Justifier que g est une similitude directe et déterminer $g(B)$ et $g(C)$. (0, 25 pt) (0, 25 pt)

b) Montrer que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. En déduire que le centre Q de g est situé sur deux cercles que l'on déterminera. Placer Q sur la figure. (0, 25 pt)

c) Justifier que $g(O) = P$. En déduire la construction de l'image du carré ABCD par g . (0, 25 pt)

Fin.