République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2013

Session complémentaire

رمضان 1434 هـ

Séries : C & TMGM
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficients : 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$.

Le paramètre n est un entier naturel.

Soit C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$. (0,75 pt)

b) Montrer que l'équation $f_0(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique U_0 et que $U_0 \in]-1,0[$. (0, 5 pt)

c) Tracer C_0. (0,25 pt)

2.a) Montrer que toutes les courbes C_n passent par un point fixe A que l'on déterminera. (0, 5 pt)

b) Etudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}. (0, 5 pt)

3 .a) Prouver que pour tout entier naturel, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution U_n et que $U_n \in]-1,0[$ (0,25 pt)

b) On considère la suite de terme général U_n. (0,25 pt)

Montrer que la suite (U_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

Exercice 2 (4 points)

Pour tout z de $\mathbb{C}$ on pose : $P(z) = z^3 - (4+6i)z^2 + (-5+18i)z + 18 - 12i$

1.a) Calculer P(2) et P(3i). (1 pt)

b) En déduire les nombres complexes z_1, z_2, z_3 solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $|z_1| \le |z_2| \le |z_3|$. (1 pt)

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$; on considère les points A,B et C d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et le point G barycentre du système $\{(A,1),(B,-3),(C,4)\}$.

Pour tout point M du plan on pose :

$\varphi_1(M) = MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2$ et $\varphi_2(M) = 4MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2$

a) Vérifier que l'affixe du point G est $z_G = 5 + \frac{3}{2}i$. (0,5 pt)

b) Donner une forme réduite de $\varphi_1(M)$ et de $\varphi_2(M)$. (0,5 pt)

c) Déterminer et construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan tels que :

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \varphi_1(M) = -3$ (0, 5 pt)

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \varphi_2(M) = 44$. (0,5 pt)

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2-\ln x} ; x>0 \\ f(0)=-2 \end{cases}$.

1.a) Montrer que f est continue en 0^+ . (0, 5 pt)
b) Etudier la dérivabilité de f en zéro à droite et interpréter graphiquement. (0, 5 pt)
c) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter graphiquement. (0, 5 pt)
2.a) Dresser le tableau de variation de f. (0, 5 pt)
b) Donner l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1. (0, 5 pt)
c) Tracer la courbe de f. (0, 25 pt)
3) On considère la fonction g définie par : $g(t)=tf(t)$.
Pour tout $x\in[1,+\infty[$, on pose $F(x)=\int_1^x g(t)dt=\int_1^x tf(t)dt$.
a) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$. Calculer $F'(x)$ et montrer que F est croissante. (0, 5 pt)
b) Vérifier que pour tout t de $[1,+\infty[$, on a : $g(t)\geq\dfrac{2\ln t}{t}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. (0, 5 pt)
c) Dresser le tableau de variation de F. (0,25 pt)

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un losange direct $ABCD$ de centre O et de coté a $(a>0)$.
tel que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$. On considère les deux points E et F tels que OEFD soit un carré direct.
1) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure (On pourra prendre (AC) horizontale) . (0,5 pt)
2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et D en A. (0,5 pt)
b) Préciser un angle et le centre de cette rotation. (0,5 pt)
3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme B en D et D en F. (0, 5 pt)
b) Déterminer le rapport et un angle de s. (0,5 pt)
c) Soit H le projeté orthogonal de D sur (BF). Déterminer les images des droites (BH) et (DH) par s. En déduire que H est le centre de s. (0, 5 pt)
d) Préciser et placer sur la figure les images des sommets du carré OEFD par la similitude s. (0,5 pt)
4) On muni le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD})$.
a) Déterminer les coordonnées des points E ;D ;B et F dans ce repère. (0, 75 pt)
b) Donner l'expression complexe de la similitude s. (0, 25 pt)
c) En utilisant 3.a) retrouver le rapport et l'angle de s, et calculer les coordonnées de H dans le repère précédent. (0,5 pt)

Exercice 5 (4 points)

Soit f la fonction de variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.
Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1.a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x)=-1+\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ et $f(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$
b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement. (0, 5 pt)
2.a) Dresser le tableau de variation de f . (0, 5 pt)
(0, 25 pt)

b) Tracer C dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.	(0, 25 pt)
c) Soit a un réel strictement supérieur à 1. Calculer en fonction de a, l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln a$.	(0, 25 pt)
3) Pour tout entier naturel non nul, on pose $I_n=\int_0^{\ln a}(f(t))^n dt$	
a) Vérifier que $I_1=2\ln\left(\frac{a+1}{2\sqrt{a}}\right)$.	(0, 25 pt)
b) Vérifier que pour tout réel x: $f^2(x)=1-2f'(x)$. En déduire la valeur de I_2	(0,5 pt)
c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0\le I_n\le\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n\ln a$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.	(0,5 pt)
d) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $I_n-I_{n+2}=\frac{2}{n+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$.	(0,2 5 pt)
4) Pour tout entier naturel $n\ge1$, on pose $S_n(a)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$.	
a) Ecrire $S_n(a)$ en fonction de certains termes de la suite (I_n). En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(a)$.	(0,5 pt)
b) Pour tout entier naturel $n\ge1$, on pose : $$T_n=\frac{9}{11}+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{11}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3+\dots+\frac{1}{n}\left(\frac{9}{11}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{9}{11}\right)^k$$ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.	(0,25 pt)

Fin.