

Baccalauréat 2012

Session Complémentaire

رمضان 1433 هـ

Séries : C & TMGM
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficients : 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - (4 - 2i)z^2 + (4 - 6i)z - 8i$.

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de \mathbb{C} :

$$P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$$

(0,75 pt)

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

(0,75 pt)

2. Soient A , B et C les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$.

a) Placer les points A , B et C .

(0,5 pt)

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3), (A;-4), (B;1), (C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5), (B;-5), (G;2)\}$.

(0,5 pt)

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\frac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur.

(0,5 pt)

3. Pour tout point M du plan on pose : $\varphi(M) = 3MO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ et on note Γ_k l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = k$, où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k , la nature de Γ_k .

(0,5 pt)

b) Déterminer et construire Γ_{16} .

(0,5 pt)

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. On désigne par

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Calculer et interpréter graphiquement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(1 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f .

(1 pt)

c) Construire la courbe (C) .

(0,5 pt)

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$U_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln(\ln n) = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} - \ln(\ln n).$$

a) Montrer que tout entier naturel $n \geq 2$, $\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \frac{1}{n \ln n}$

(0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t) dt$. En déduire le sens de variation de (U_n) .

(0,5 pt)

c) Montrer que tout entier naturel $n \geq 2$, $U_{n+1} - U_n \geq f(n+1) - f(n)$. En déduire que $U_n \geq -\ln(\ln 2)$.

(0,25 pt)

d) Déduire de ce qui précède que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $-\ln(\ln 2) \leq \ell \leq \frac{1}{2 \ln 2} - \ln(\ln 2)$.

(0,25 pt)

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. (1 pt)
- b) Montrer que la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point d'abscisse 1. (1 pt)
- 2.a) Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)
- b) Construire la courbe (C). (0,5 pt)
3. Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.
 - a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (I_n) . (0,5 pt)
 - b) Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en conclure ? (0,5 pt)
 - c) Donner un encadrement du nombre I_n qui permet de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. Calculer cette limite. (0,5 pt)
- 4.a) Calculer I_0 . (0,5 pt)
- b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout n : $I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n$. (0,5 pt)
- c) Calculer l'aire sous la courbe (C) délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$. (0,5 pt)

Exercice 4 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct $ABCD$ de côté a , ($a > 0$).

Soient E et F les symétriques respectifs des points C et B par rapport à (AD) . Soit G le point tel que le triangle DBG soit équilatéral direct. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[DB]$ et $[DF]$.

- 1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complètera au fur et à mesure. (1 pt)
- b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme D en G et F en B . Préciser l'angle et le centre de r_1 . (1 pt)
- c) Soit la rotation r_2 qui transforme G en E et B en A . Préciser l'angle et le centre de r_2 . (0,5 pt)
- d) On pose $r = r_2 \circ r_1$. Déterminer $r(D)$ et $r(F)$. Caractériser r . (0,75 pt)
2. On considère l'homothétie h de centre B et de rapport $k = \frac{1}{2}$. On note $s = h \circ r$.
 - a) Montrer que s est une similitude directe. Préciser le rapport et un angle de s . (0,75 pt)
 - b) Soit Ω le centre de s . Montrer que Ω appartient à deux cercles Γ_1 et Γ_2 que l'on déterminera. (0,75 pt)
 - c) Déterminer deux réels α et β tels que Ω soit le barycentre du système $\{(E, \alpha); (I, \beta)\}$. Placer Ω sur la figure. (0,25 pt)
3. On considère l'ensemble Γ des points M du plan tels que $MA + ME = 2a$ où a est la longueur du côté du carré $ABCD$.
 - a) Montrer que Γ est une ellipse passant par D . (0,5 pt)
 - b) Préciser les sommets, les longueurs des axes de Γ et calculer son excentricité e . (0,25 pt)
 - c) Déterminer $\Gamma' = s(\Gamma)$ puis construire Γ et Γ' . (0,25 pt)

Fin.