Corrigé de l'épreuve de Mathématiques : Section biologie

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1.a. $\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 4)$.

b. A admet trois valeurs propres distinctes 0, 1,-4 donc A est diagonalisable.

2. a. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\det P = -1 \neq 0$.

Donc (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. On a : $f(v_1) = v_1$; $f(v_2) = 0$ et $f(v_3) = -4v_3$.

donc $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

3. $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = x' \\ 2x - y + z = y' \\ x + z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' + y' - 2z' \\ y = x' - z' \\ z = -x' - y' + 3z' \end{cases}$

d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. a. $\Delta = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

b. Les valeurs propres de C sont -4, 0 et 4. donc C est diagonalisable.

5. $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n \iff \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 0 \\ -4c_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4b_n \\ -4c_n \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} \\ b_{n+2} = 4b_n \\ c_{n+2} = -4c_{n+1} - 4c_n \end{cases}$.

b. On a : $a_0 = -1$, $a_n = -3$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$b_{n+2} = 4b_n \Longrightarrow b_n = \alpha 2^n + \beta(-2)^n$.

$b_0 = 0$ et $b_1 = -1$ donc $b_n = \frac{1}{4}\left(-2^n + (-2)^n\right)$.

$c_{n+2} + 4c_{n+1} + 4c_n = 0$ donc $c_n = (\alpha n + \beta)(-2)^n$.

$c_0 = 2$ et $c_1 = 4$ donne $c_n = (-4n + 2)(-2)^n$.

6. $X_{n+2} = AX_{n+1} + CX_n \iff X_{n+2} = PDP^{-1}X_{n+1} + P\Delta P^{-1}X_n$.

On pose : $Y_n = P^{-1}X_n$ donc $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

On a : $Y_0 = P^{-1}X_0$ et $Y_1 = P^{-1}X_1$.

D'où Y_n vérifie les hypothèses de 5. ie $Y_n = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{4}\left(-2^n + (-2)^n\right) \\ (-4n+2)(-2)^n \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} -3 + \frac{1}{4}(-2)^n - \frac{1}{4}2^n - 4n(-2)^n + 2(-2)^n \\ 6 - \frac{1}{4}(-2)^n + \frac{1}{4}2^n - 4n(-2)^n + 2(-2)^n \\ -3 - 4n(-2)^n + 2(-2)^n. \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. Nous devons avoir $k\int\limits_0^1\int\limits_0^1(2x+3y^2)dxdy = 1.$

D'où $k\int\limits_0^1[x^2+3y^2x]_0^1dy = k\int\limits_0^1(1+3y^2)dy = 2k = 1.$

Par suite $k = 0.5$.

2. a. On a $F(t,z) = \int\limits_0^t\int\limits_0^z(x+\frac{3}{2}y^2)dxdy = \frac{t^2z}{2} + \frac{z^3}{2}t$ si t et z appartiennent à $[0,1]$.

b. $F(t,z) = \int\limits_0^1\int\limits_0^z(x+\frac{3}{2}y^2)dxdy = \frac{z}{2} + \frac{z^3}{2}$ si $t > 1$ et z appartient à $[0,1]$.

c. $F(t,z) = \int\limits_0^t\int\limits_0^1(x+\frac{3}{2}y^2)dxdy = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2}$ si t appartient à $[0,1]$ et $z > 1$.

d. $F(t,z) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1(x+\frac{3}{2}y^2)dxdy = 1$ si $t > 1$ et $z > 1$.

3. Les fonctions de répartitions marginales sont définies par

$$F(t,+\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{1}{2}(t+t^2) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases},$$

$$F(+\infty,z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0, \\ \frac{1}{2}(z+z^3) & \text{si } 0 \leq z \leq 1, \\ 1 & \text{si } z > 1. \end{cases}.$$

4. Le calcul donne

$E(X) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1(x+\frac{3}{2}y^2)xdxdy = \frac{7}{12}.$

$E(Y) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1(x+\frac{3}{2}y^2)ydxdy = \frac{5}{8}.$

$E(XY) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1(x+\frac{3}{2}y^2)xydxdy = \frac{17}{48}.$

On en déduit que

$Cov(X,Y) = -\dfrac{1}{96}$.

Problème

Partie I

1. $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

2. a. $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \ \ \cos t\, dt$

$$= [\sin t \ \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t\, dt = (n+1) I_n - (n+2) I_{n+2}.$$

Donc $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n \Longrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1}$.

b. $I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} ... \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{C_{2n}^n}{4^n}\dfrac{\pi}{2}$.

$I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} ... \dfrac{2}{1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{4^n}{(2n+1)\, C_{2n}^n}$.

3. a. On a : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t \Longrightarrow 0 < I_{n+1} \leq I_n \Longrightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

Comme $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \Longrightarrow \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

D'où $\dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ ie $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4^n}{(2n+1)\, C_{2n}^n} \cdot \left(\dfrac{C_{2n}^n}{4^n}\dfrac{\pi}{2}\right)^{-1} = 1$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4^n}{C_{2n}^n \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$ car $\dfrac{2}{2n+1} \backsim \dfrac{1}{n}$ $(n \to +\infty)$.

. C_{2n}^n est équivalent à $\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ quand $n \to +\infty$.

Partie II

1. a. On a : $\dfrac{C_{2n}^n}{C_{2n+2}^{n+1}} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \dfrac{1}{4}$ donc $R = \dfrac{1}{4}$.

b. $C_{2n}^n \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \backsim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}.\ (n \to +\infty)$

Or $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge donc $\sum C_{2n}^n \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ diverge.

c. $\sum C_{2n}^n \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$ est une série alternée.

Comme $C_{2n}^n \left(\frac{1}{4}\right)^n \backsim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0 \ (n \to +\infty)$ et $\dfrac{C_{2n+2}^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{C_{2n}^n \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1.$

donc la suite $\left(C_{2n}^n \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$ est positive décroissante vers 0 , d'où d'aprés le critère de séries alternées : $\sum C_{2n}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ converge.

2.a. $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \ C_{2n}^n x^{n-1}.$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} -2nC_{2n}^n x^n + \frac{1}{2} n C_{2n}^n x^{n-1} \overset{?}{=} S(x), \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[.$ $\Longrightarrow S(x) = \left(-2x + \frac{1}{2}\right) S'(x)$

b— donc $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\ , \ S(x) = \dfrac{k}{\sqrt{\left|x - \frac{1}{4}\right|}}.$

Or $S(0) = 1$ d'où $S(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}.$

Partie III

1. $(E) : (1-x^2)\, y' - xy = 1.$

a. $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$

$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_{2n+1} x^{2n}$

donc $(1-x^2)\, y'(x) - xy(x) = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ a_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} a_{2n-1} \end{cases}$

d'où $a_{2n+1} = \dfrac{4^n}{(2n+1)\, C_{2n}^n}.$

b. $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n+3}} = \dfrac{2n+3}{2n+1} \to 1 \ (n \to +\infty)\,.$

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$ est 1.

donc $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n}{(2n+1)\, C_{2n}^n} x^{2n+1}$ est une solution de (E) définie sur $]-1, 1[$.

2. a. Le domaine de définition de f est $]-1, 1[$.

b. $f(x) = \dfrac{(Arc \sin x)}{\sqrt{1-x^2}}$ donc f est développable en série entière en 0, comme produit de fonctions développables en série entière.

3. a. $\sqrt{1-x^2}f(x) = Arc\sin x$.

$$\Longrightarrow \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}f(x) + \sqrt{1-x^2}f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\Longrightarrow (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$.

b. f est une fonction impaire définie sur $]-1,1[$ vérifiant l'équation différentielle (E) et développable en série entière à l'origine.

Donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n+1)\,C_{2n}^n} x^{2n+1}$

On a : $g'(x) = 2f(x)$ donc $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n+1)\,(n+1)C_{2n}^n} x^{2n+2}$.

II-2-a)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -2n\, C_{2n}^{n} x^{n} + \frac{1}{2} n\, C_{2n}^{n} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-2n\, C_{2n}^{n} + \frac{n+1}{2} C_{2n+2}^{n+1} \right) x^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-2n\, C_{2n}^{n} + \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{2}} \, \frac{\cancel{(2n+2)}(2n+1)(2n)!}{\cancel{(n+1)^2}\,(n!)^2} \right) x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-2n\, C_{2n}^{n} + (2n+1)\, C_{2n}^{n} \right) x^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^{n} x^{n} = S(x)$$